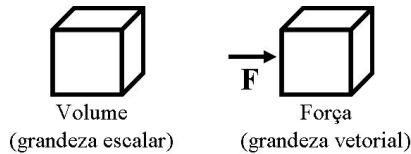


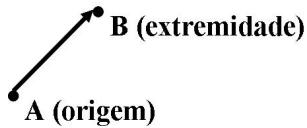
VETORES - TRATAMENTO GEOMÉTRICO



Os vetores representam grandezas vetoriais e, portanto possuem:

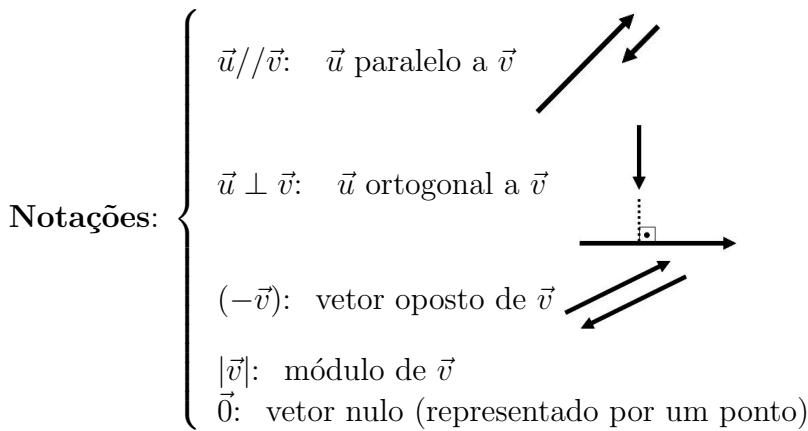
- módulo (ou tamanho ou norma)
- direção e
- sentido

Representação geométrica do vetor: segmento orientado (flechas)



$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

Todos os segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido representam um mesmo vetor.



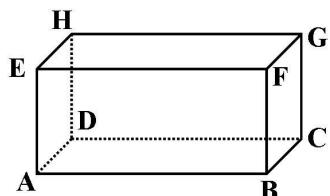
Vetores colineares = pertencem a uma mesma reta

Vetores coplanares = pertencem a um mesmo plano (Dois vetores são sempre coplanares)

EXERCÍCIOS

1. V ou F?
- Se $\vec{u} = \vec{v}$ então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$
 - Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ então $\vec{u} = \vec{v}$
 - Se $\vec{u}/\parallel \vec{v}$ então $\vec{u} = \vec{v}$
 - Se $\vec{u} = \vec{v}$ então $\vec{u}/\parallel \vec{v}$

2. V ou F?

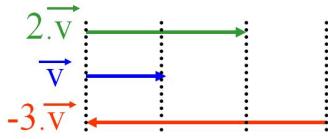


- | | | |
|---|--|--|
| a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$ | e) $ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HF} $ | i) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}$ e \overrightarrow{EG} são coplanares |
| b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$ | f) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$ | j) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e \overrightarrow{CG} são coplanares |
| c) $B - A = G - H$ | g) $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$ | k) \overrightarrow{AE} é ortogonal ao plano ABC |
| d) $F - G = D - A$ | h) $\overrightarrow{BG}/\parallel \overrightarrow{ED}$ | l) \overrightarrow{DC} é paralelo ao plano HEF |

OPERAÇÕES COM VETORES: I) Multiplicação de um número real por vetor

Dados $\alpha \in R$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ é tal que:

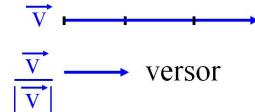
- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{a)} |\alpha\vec{v}| = |\alpha| |\vec{v}| \\ \text{b)} \alpha\vec{v} \parallel \vec{v} \\ \text{c)} \alpha\vec{v} \text{ e } \vec{v} \text{ têm } \begin{cases} \text{o mesmo sentido, se } \alpha > 0 \text{ e} \\ \text{sentido contrários, se } \alpha < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



OBS: 1) Se $\alpha = 0$ ou se $\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

2) $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ é um vetor unitário (módulo igual a 1) e paralelo ao vetor \vec{v} . Ele é o vessor de \vec{v} .

Por exemplo, se $|\vec{v}| = 3$, o vessor de \vec{v} é $\frac{\vec{v}}{3}$ e $\left| \frac{\vec{v}}{3} \right| = 1$.

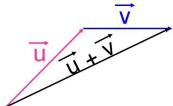


EXERCÍCIOS

- a) $|5\vec{v}| = |-5\vec{v}| = 5|\vec{v}|$
1. V ou F? b) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.
c) Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$ então $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.
2. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Determinar o vetor paralelo a \vec{v} tal que:
a) tenha o mesmo sentido de \vec{v} e módulo 5.
b) tenha sentido contrário ao de \vec{v} e módulo 10.

II) Adição de vetores

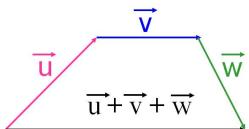
1) Vetores não paralelos



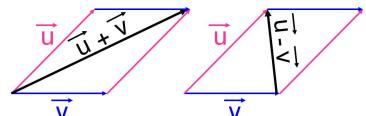
2) Vetores paralelos



3) Três vetores



4) Diferença de vetores $\vec{u} + (-\vec{v})$



Propriedades da adição

- a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- c) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

EXERCÍCIO: Com base na figura abaixo, determinar os vetores abaixo, expressando-os com origem no ponto A. Exemplos: $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$ $2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

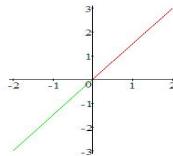
-
- a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$
 - b) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$
 - c) $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$
 - d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$
 - e) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG}$

VETORES - TRATAMENTO ALGÉBRICO

VETORES NO \mathbb{R}^2

Um vetor no \mathbb{R}^2 é um par ordenado de números reais (x, y) . Cada vetor (x, y) pode ser representado geometricamente por segmento orientado com origem na origem dos sistema cartesiano xOy . O vetor oposto de $\vec{v} = (x, y)$ é o vetor $-\vec{v} = (-x, -y)$.

Exemplo 1 $\begin{cases} \vec{v} = (2, 3) \\ -\vec{v} = (-2, -3) \end{cases}$



EXERCÍCIO Represente os vetores no plano cartesiano:

$$\vec{a} = (1, 2) \quad \vec{b} = (-1, 2) \quad \vec{c} = (1, -2) \quad \vec{d} = (-1, -2) \quad \vec{e} = (1, 0) \quad \vec{f} = (-1, 0) \quad \vec{g} = (0, 2) \quad \vec{h} = (0, -2)$$

IGUALDADE de vetores: Dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Exemplo 2 Se $\vec{u} = (x + 1, 4)$ e $\vec{v} = (5, 2y - 6)$ são iguais, então $\begin{cases} x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4 \\ 2y - 6 = 4 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

EXERCÍCIO Calcule os valores de x e y para que os vetores \vec{u} e \vec{v} abaixo sejam iguais:

- a) $\vec{u} = (x + 2, 5)$ e $\vec{v} = (4, y + 5)$
- b) $\vec{u} = (4, y + 2)$ e $\vec{v} = (x - 5, 6)$
- c) $\vec{u} = (2x + 1, y + 3)$ e $\vec{v} = (5, 4)$
- d) $\vec{u} = (x^2 - 1, 9)$ e $\vec{v} = (0, y^2)$

OPERAÇÕES com vetores: Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in R$. Então:

$$1) \alpha\vec{u} = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

$$2) \vec{u} \pm \vec{v} = (x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

Exemplo 3 Se $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ e $\vec{w} = (1, 0)$ então

$$2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w} = 2(2, -3) + (-1, 4) - 3(1, 0) = (4, -6) + (-1, 4) - (3, 0) = (4 - 1 - 3, -6 + 4 - 0) = (0, -2)$$

Propriedades: Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} e escalares α e β , tem-se:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

EXERCÍCIO: Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (1, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 1)$, determinar:

a) $2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

d) $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

Vetor definido por dois pontos Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Exemplo 4 Dados os pontos $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ e $C(-2, 4)$,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1) - (-1, 2) = (4, -3)$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-1, 2) - (3, -1) = (-4, 3) = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = (C - B) + (C - A) = [(-2, 4) - (3, -1)] + [(-2, 4) - (-1, 2)] = (-1, 2) + (-5, 5) = (-6, 7)$$

EXERCÍCIO: Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(3, -1)$ e $O(0, 0)$, calcular:

a) \overrightarrow{AB}

b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$

c) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

EXERCÍCIO: Qual o ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está em $(3, 1)$?

EXERCÍCIO: Encontrar o vértice oposto a B , no paralelogramo $ABCD$, para $A(-3, -1)$, $B(4, 2)$ e $C(5, 5)$.