

RESUMO PARA PRÓXIMAS AULAS - ÁLGEBRA LINEAR

Sejam dois vetores, \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , não-paralelos. Então, para cada vetor \vec{v} , existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tais que

$$\boxed{\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2}.$$

Neste caso, dizemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \text{ é combinação linear de } \vec{v}_1 \text{ e } \vec{v}_2 \\ \text{e} \\ B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ é base} \end{array} \right.$$

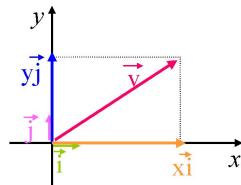
Notaçāo: $\vec{v} = (a_1, a_2)_B$ ou $\vec{v}_B = (a_1, a_2)$

Uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é **ortonormal** se $\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \text{ (ortogonais)} \\ \text{e} \\ |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1 \text{ (unitários)} \end{array} \right.$

Base canônica de \mathbb{R}^2 é a base $C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ onde $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{v} = (x, y) \text{ (expressāo analítica)}$$



Exemplo 1 Sendo $\vec{v} = 10\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ e $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$, expressar \vec{v} como combinação linear de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = (10, 2) \\ \vec{v}_1 = (3, 5) \\ \vec{v}_2 = (-1, 2) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \Rightarrow (10, 2) = a(3, 5) + b(-1, 2) \\ \Rightarrow (10, 2) = (3a, 5a) + (-b, 2b) = (3a - b, 5a + 2b) \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a - b = 10 \\ 5a + 2b = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6a - 2b = 20 \\ 5a + 2b = 2 \end{array} \right.$$

Somando as duas equações, tem-se: $11a = 22 \Rightarrow \boxed{a = 2}$. Substituindo em $3a - b = 10$, $6 - b = 10 \Rightarrow \boxed{b = -4}$.

Portanto, $\boxed{\vec{v} = 2\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2}$.

Exercício 1 Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determinar:

- a) $2\vec{u} - \vec{v}$
- b) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$
- c) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

Exercício 2 Dados os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , escrever \vec{w} como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} , nos seguintes casos:

- a) $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$
- b) $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$
- c) $\vec{u} = 4\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + 8\vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i}$

VETORES NO ESPAÇO (R^3)

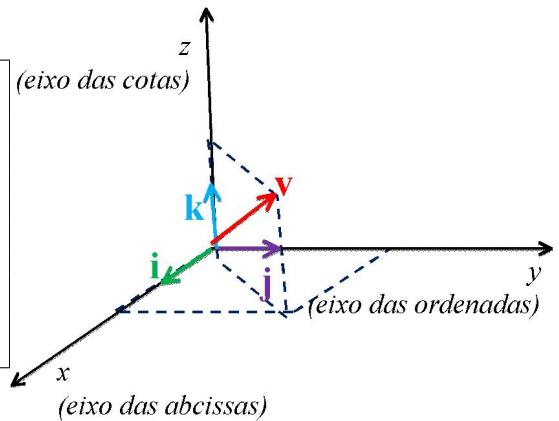
Base canônica dos vetores no espaço é a base $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Todo vetor \vec{v} pode ser expresso como combinação linear dos vetores de B .

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ou

$$\vec{v} = (x, y, z) \text{ (expressão analítica de } \vec{v})$$



$$\text{Exemplos: } 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (2, -3, 1) \quad \vec{i} - \vec{j} = (1, -1, 0) \quad 2\vec{j} - \vec{k} = (0, 2, -1) \quad 4\vec{k} = (0, 0, 4)$$

Todas as definições e operações vistas para vetores no R^2 são similares em R^3 . Exemplos:

$$1) \text{ Dados os pontos } A(1, -2, 4) \text{ e } B(-1, 4, 2), \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -3, 1) - (-1, 4, 2) = (0, -7, -1)$$

$$2) \text{ Dados } \vec{u} = (-2, 5, 3) \text{ e } \vec{v} = (4, 1, -1), \quad \vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 5, 3) + 2(4, 1, -1) = (-2, 5, 3) + (8, 2, -2) = (6, 7, 1)$$

Exercício 3 Expressar \vec{t} como combinação linear dos demais vetores, nos seguintes casos:

$$a) \vec{u} = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{v} = \vec{k} \quad e \quad \vec{t} = \vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$$

$$b) \vec{u} = (1, 2, 3), \quad \vec{v} = (-1, 1, 0), \quad \vec{w} = (0, 0, 2) \quad e \quad \vec{t} = (-1, 4, -3)$$

Exercício 4 Encontrar o vértice oposto a B no paralelogramo de vértices consecutivos $ABCD$, sendo $A(3, -2, 4)$, $B(5, 1, -3)$ e $C(0, 1, 2)$.

PRODUTO ESCALAR de dois vetores

- Em \mathbb{R}^2 : Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ então $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2}$. **Obs:** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (lê-se u escalar v)
- Em \mathbb{R}^3 : Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são dois vetores no \mathbb{R}^3 então $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Exemplo 2 $(-1, 2) \cdot (5, 2) = (-1) \times 5 + 2 \times 2 = -5 + 4 = -1$

$$(-1, 2, 0) \cdot (5, 2, 3) = (-1) \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 = -5 + 4 + 0 = -1$$

Exercício 5 Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular

a) $\vec{u} \cdot \vec{u}$

b) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$

c) $\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v}$

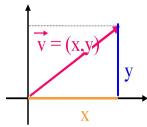
d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

Propriedades do Produto Escalar

Para quaisquer vetores vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} e número real α , são válidas:

- | | |
|---|---|
| 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ | 5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} ^2$ |
| 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ | 6) $ \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \vec{u} \vec{v} $ (Desigualdade de Schwarz) |
| 3) $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ | 7) $ \vec{u} + \vec{v} \leq \vec{u} + \vec{v} $ (Desigualdade Triangular) |
| 4) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$, se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, se $\vec{u} = \vec{0}$. | |

MÓDULO de um vetor



Pelo Teorema de Pitágoras,

$$|\vec{v}|^2 = x^2 + y^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \quad \text{ou} \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

O módulo do $\vec{v} = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 é dado por $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

$$\text{Exemplo 3} \quad |(2, -3)| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad |(3, 1, -1)| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

Exemplo 4 Determinar o perímetro e a área do triângulo de vértices A, B e C, onde A(0, 1), B(3, 1) e C(3, 3).

A distância entre dois pontos A e B é $|\vec{AB}|$. Então

$$\begin{cases} |\vec{AB}| = |B - A| = |(3, 1) - (0, 1)| = |(3, 0)| = 3 \\ |\vec{AC}| = |C - A| = |(3, 3) - (0, 1)| = |(3, 2)| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \\ |\vec{BC}| = |C - B| = |(3, 3) - (3, 1)| = |(0, 2)| = 2 \end{cases} \Rightarrow P = 5 + \sqrt{13}$$

Exercício 6 Determinar o perímetro do triângulo de vértices A, B e C, onde A(-1, 2, 3), B(-3, 6, 0) e C(-4, 7, 2).

Definição geométrica de produto escalar

Se \vec{u} e \vec{v} são vetores não-nulos e θ o ângulo entre eles ($0 \leq \theta < \pi$ rad), então $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ ou $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$.

Se os vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos então $\theta = 0$, se possuem o mesmo sentido ou $\theta = \pi$ ou 180° se os sentidos são opostos.

Se os vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais então $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Logo, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

O vetor $\vec{0}$ é ortogonal a todo vetor, isto é, $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$, para todo \vec{v} .

Exemplo 5 Mostrar que os seguintes pares de vetores são ortogonais:

$$\begin{array}{ll} a) \vec{u} = (1, -2) \text{ e } \vec{v} = (2, 1) & \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0 \\ b) \vec{u} = (1, -2, 3) \text{ e } \vec{v} = (4, 5, 2) & \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 4 - 10 + 6 = 0 \end{array}$$

Exemplo 6 Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$ e $C(-1, 2, 1)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, -1) - (2, 1, 3) = (-1, -1, -4) \quad |\vec{u}| = \sqrt{(-1, -1, -4) \cdot (-1, -1, -4)} = \sqrt{18}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 2, 1) - (2, 1, 3) = (-3, 1, -2) \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-3, 1, -2) \cdot (-3, 1, -2)} = \sqrt{14}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-1, 2, 1) - (1, 0, -1) = (-2, 2, 2) \quad |\vec{w}| = \sqrt{(-2, 2, 2) \cdot (-2, 2, 2)} = \sqrt{12}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, -1, -4) \cdot (-3, 1, -2) = 10$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (-1, -1, -4) \cdot (-2, 2, 2) = -8$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1, -2) \cdot (-2, 2, 2) = 4$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{10}{\sqrt{18}\sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{18}\sqrt{14}} \Rightarrow \hat{A} = \arccos \frac{10}{\sqrt{18}\sqrt{14}} \approx 51$$

$$\cos \hat{B} = \frac{(-\vec{u}) \cdot \vec{w}}{|(-\vec{u})| |\vec{w}|} = \frac{-(\vec{u}) \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{8}{\sqrt{18}\sqrt{12}} \Rightarrow \hat{B} = \arccos \frac{8}{\sqrt{18}\sqrt{12}} \approx 57$$

$$\cos \hat{C} = \frac{(-\vec{v}) \cdot (-\vec{w})}{|(-\vec{v})| |(-\vec{w})|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{12}} \Rightarrow \hat{C} = \arccos \frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{12}} \approx 72 \quad 51 + 57 + 72 = 180$$

Exercício 7 Provar que os pontos $A(-1, 2, 3)$, $B(-3, 6, 0)$ e $C(-4, 7, 2)$ são vértices de um triângulo retângulo em B .

Exercício 8 Dados os pontos $A(-1, 0, 5)$, $B(2, -1, 4)$ e $C(1, 1, 1)$, determinar x tal que \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BP} sejam ortogonais, sendo $P(x, 0, x - 3)$.

Exercício 9 Determinar o ângulo entre os vetores

$$a) \vec{u} = (2, -1, -1) \text{ e } \vec{v} = (-1, -1, 2).$$

$$b) \vec{u} = (1, -2, 1) \text{ e } \vec{v} = (-1, 1, 0).$$