INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 1 – Conceitos Fundamentais

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Apresentação do Curso.
- Apresentação da Bibliografia
- Definição da Mecânica Técnica.
- Sistema Internacional de Unidades.

Apresentação do Curso

- Aula 1 - Definição de Mecânica, Conceitos Fundamentais e Sistema Internacional de Unidades
- Aula 2 - Escalares e Vetores - Lei dos Senos, Lei dos Cossenos e Regra do Paralelogramo
- Aula 3 - Sistema de Forças Coplanares
- Aula 4 - Adição e Subtração de Vetores Cartesianos
- Aula 5 - Vetor Posição e Produto Escalar
- Aula 6 - Equilíbrio do Ponto Material em Duas Dimensões
- Aula 7 - Equilíbrio do Ponto Material em Três Dimensões
- Aula 8 - Equilíbrio do Ponto Material em Três Dimensões
- Aula 9 - Avaliação 1
- Aula 10 - Momento de uma Força, Formulação Escalar
- Aula 11 - Momento de uma Força, Formulação Vetorial, Princípio dos Momentos
- Aula 12 - Momento em Relação a um Eixo Específico e Momento de um Binário
- Aula 13 - Sistemas Equivalentes de Cargas Concentradas
- Aula 14 - Sistemas Equivalentes de Cargas Distribuídas
- Aula 15 - Cálculo de Reações de Apoio em Estruturas
- Aula 16 - Equilíbrio de um Corpo Rígido em Duas e Três Dimensões
- Aula 17 - Estudo de Treliças Planas
- Aula 18 - Estudo de Máquinas e Estruturas
- Aula 19 - Avaliação 2
- Aula 20 - Exame Final

Bibliografia Recomendada

- HIBBELER, R. C. **Mecânica Estática.** 10 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2005, 540p.
- BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática**.5.ed. São Paulo: Makron Books, 1991. 980p.
- BEDFORD & FOWLER. Engineering Mechanics – Statics 3ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002, 583p.

Definição de Mecânica

- A mecânica pode ser definida como o ramo das ciências físicas dedicado ao estudo do estado de repouso ou movimento de corpos sujeitos à ação de forças. Normalmente o estudo da mecânica é dividido em três partes: a mecânica dos corpos rígidos, a mecânica dos corpos deformáveis e a mecânica dos fluidos.

Mecânica dos Corpos Rígidos

- A mecânica dos corpos rígidos pode ser dividida em **estática** (equilíbrio de um corpo rígido) e **dinâmica** (movimento de um corpo rígido).
- A **estática** tem por finalidade o estudo do equilíbrio de um corpo em repouso ou em movimento com velocidade constante.
- A **dinâmica**, por sua vez, pode ser caracterizada como a parte da mecânica dos corpos rígidos dedicada ao estudo do movimento de corpos sob a ação de forças, ou seja, movimentos acelerados dos corpos.

Grandezas Físicas Presentes na Mecânica

- **a) Comprimento:** Grandeza essencial que localiza a posição de um ponto no espaço. A partir do comprimento é possível descrever com exatidão a dimensão de um sistema físico. No sistema internacional de unidades (SI), a unidade básica de comprimento é o metro (m).
- **b) Tempo:** Pode ser definido como o intervalo entre dois eventos consecutivos. Medições desse intervalo podem ser realizadas por comparações, como por exemplo, eventos repetitivos tal como a rotação da Terra ao redor de seu próprio eixo. No sistema internacional de unidades (SI), a unidade básica de tempo é o segundo (s). Como o presente curso trata apenas dos problemas de estática, a quantidade tempo não possui influência significativa na solução dos problemas, porém em problemas de dinâmica, o tempo é uma grandeza muito importante para descrever as variações de posição, velocidade, aceleração e forças em um corpo.
- **c) Massa:** A massa de um corpo representa uma quantidade absoluta que independe da posição do corpo e do local no qual o mesmo é colocado. No sistema internacional de unidades (SI), a unidade básica de massa é o quilograma (kg). A massa representa uma propriedade da matéria que permite comparar a ação de um corpo em relação a outro e de um modo geral pode ser interpretada com a resistência que um corpo oferece a mudanças em seu movimento de translação.
- **d) Força:** Pode ser definida como a ação de um corpo em outro corpo. Como um corpo não pode exercer uma força em um segundo corpo a menos que este ofereça uma resistência, pode-se concluir que uma força nunca existe só, ou seja, as forças sempre ocorrem aos pares, e as duas forças possuem a mesma magnitude e sentidos contrários. No sistema internacional de unidades (SI), a unidade básica de força é o Newton (N), que é representado a partir da seguinte relação, 1 N = 1 kgm/s^2.

Sistema Internacional de Unidades

- A 11ª CGPM, em 1960, através de sua Resolução n°12, adotou finalmente o nome ***SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES***, com abreviação internacional **SI** para o sistema prático de unidades, e instituiu regras para os prefixos, para as unidades derivadas e as unidades suplementares, além de outras indicações, estabelecendo uma regulamentação para as unidades de medidas. A definição de Quantidade de Matéria (mol) foi introduzida posteriormente em 1969 e adotada pela 14ª CGPM, em 1971.

- CGPM - Conférence Générale de Pois et Mesures

Unidades de Base do SI

- São sete unidades bem definidas que, por convenção, são tidas como dimensionalmente independentes. Essas unidades são apresentadas na Tabela a seguir.

Grandeza	Unidade	Símbolo
comprimento	metro	m
massa	quilograma	kg
tempo	segundo	s
corrente elétrica	ampère	A
temperatura termodinâmica	kelvin	K
quantidade de matéria	mol	mol
intensidade luminosa	candela	cd

Definição das Unidades de Base

- **Metro (m):** É o caminho percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de um segundo.
- **Quilograma (kg):** É igual à massa do protótipo internacional, feito com uma liga platina - irídio, dentro dos padrões de precisão e confiabilidade que a ciência permite.
- **Segundo (s):** É a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do átomo de césio-133, no estado fundamental.
- **Ampère (A):** É uma corrente constante que, se mantida em dois condutores retilíneos e paralelos, de comprimento infinito e seção transversal desprezível, colocados a um metro um do outro no vácuo, produziria entre estes dois condutores uma força igual a 2 x10-7 newton, por metro de comprimento.
- **Kelvin (K):** É a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água.
- **Mol (mol):** É a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos forem os átomos contidos em 0,012 quilograma de carbono 12. Comentários: a) O nome desta quantidade vem do francês "quantité de matière",derivado do latim "quantitas materiae", que antigamente era usado para designar a quantidade agora denominada de "massa". Em inglês usa-se o termo "amount of substance". Em português, consta no Dicionário como "quantidade de substância", mas pode-se admitir o uso do termo "quantidade de matéria", até uma definição mais precisa sobre o assunto. b) Quando se utiliza o mol, as entidades elementares devem ser especificadas, podendo ser átomos, moléculas, íons, elétrons ou outras partículas ou agrupamentos de tais partículas.
- **Candela (cd):** É a intensidade luminosa, em uma determinada direção, de uma fonte que emite radiação monocromática de freqüencia 540x1012 hertz e que tem uma intensidade radiante naquela direção de 1/683 watt por esteradiano.

Unidades Suplementares do SI

- São apenas duas as unidades suplementares: o radiano, unidade de ângulo plano e o esteradiano, unidade de ângulo sólido.

Grandeza	Unidade	Símbolo
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esteradiano	sr

Unidades Derivadas do SI

- São formadas pela combinação de unidades de base, unidades suplementares ou outras unidades derivadas, de acordo com as relações algébricas que relacionam as quantidades correspondentes. Os símbolos para as unidades derivadas são obtidos por meio dos sinais matemáticos de multiplicação e divisão e o uso de expoentes. Algumas unidades SI derivadas têm nomes e símbolos especiais.

Grandeza	Unidade	Símbolo
área	metro quadrado	m^2
volume	metro cúbico	m^3
velocidade	metro por segundo	m/s
aceleração	metro por segundo quadrado	m/s^2
número de onda	metro recíproco	m^{-1}
densidade	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
volume específico	metro cúbico por quilograma	m^3/kg
concentração	mol por metro cúbico	mol/m^3

Unidades Derivadas do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo	Expressão(*)
freqüência	hertz	Hz	s^{-1}
força	newton	N	$kg\ m/s^2$
pressão, tensão	pascal	Pa	N/m^2
energia, trabalho	joule	J	N m
potência, fluxo radiante	watt	W	J/s
quantidade de eletricidade	coulomb	C	A s
potencial elétrico	volt	V	W/A
capacitância elétrica	farad	F	C/V
resistência elétrica	ohm		V/A
condutância elétrica	siemens	S	A/V
fluxo magnético	weber	Wb	V s
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m^2
indutância	henry	H	Wb/A
temperatura celcius	grau celcius	°C	K

Unidades Derivadas do SI

Grandeza	Unidade	Expressão(*)
aceleração angular	radiano por segundo quadrado	rad/s^2
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s
densidade de corrente	ampère por metro quadrado	A/m^2
densidade de carga elétrica	coulomb por metro quadrado	C/m^2
força do campo elétrico	volt por metro	V/m
densidade de energia	joule por metro cúbico	J/m^3
entropia	joule por kelvin	J/K
força do campo magnético	ampère por metro	A/m
energia molar	joule por mol	J/mol
entropia molar	joule por mol kelvin	J/(mol K)
densidade de potência	watt por metro quadrado	W/m^2
radiância	watt por metro quadrado esteradiano	$W/(m^2\ sr)$
potência radiante	watt por esteradiano	W/sr
energia específica	joule por quilograma	J/kg
entropia específica	joule por quilograma kelvin	J/(kg K)
tensão superficial	newton por metro	N/m
condutividade térmica	watt por metro kelvin	W/(m K)

Múltiplos e Submúltiplos

Fator	Prefixo	Símbolo
1 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{21}	zetta	Z
1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}	exa	E
1 000 000 000 000 000 = 10^{15}	peta	P
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
1 000000 = 10^{6}	mega	M
1 000 = 10^{3}	quilo	k
100 = 10^{2}	hecto	h
10 = 10^{1}	deca	da
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001= 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a
0,000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-21}	zepto	z

Escrita de Unidades

- Os princípios gerais relativos à escrita de símbolos das unidades foram adotadas pela 9ª CGPM, em 1948, alguns comentários são apresentados a seguir.
- a) Os símbolos usados para discriminar quantidades físicas devem ser apresentados em *itálico*, mas os símbolos das unidades são digitados em romano [ex: *F* = 23 N].
- b) As unidades derivadas de nomes próprios devem ser escritas com a primeira letra em maiúsculo, enquanto que as outras devem ser apresentadas em minúsculo [ex: newton, N; pascal, Pa, metro, m], exceto o litro, que pode ser escrito em minúsculo ou maiúsculo (l ou L).
- c) O símbolo da unidade é geralmente descrito pela primeira letra do nome da unidade [ex: grama, g e não gm; segundo, s e não seg ou sec], com algumas exceções [ex: mol, cd e Hz]. Também, o símbolo da unidade não deve ser seguido por um ponto e o seu plural não é seguido de "s" [ex: 3 kg e não 3 kg. ou 3 kgs].
- d) A palavra "grau" e seu símbolo "°" devem ser omitidos da unidade de temperatura termodinâmica, *T* [isto é, usa-se apenas kelvin ou K e não Kelvin ou °K], mas são retidos quando se quer designar temperatura Celcius, *t* [ex: graus Celcius ou °C].
- e) Os símbolos dos prefixos que representam grandezas maiores ou iguais a 106 são escritos em maiúsculo, enquanto que todas os outros são escritos em minúsculo [ex: mega, M; hecto, h].
- f) Um prefixo nunca deve ser usado sozinho [ex: 106/m3, mas não M/m3].
- g) Não deve ser colocado espaço entre o prefixo e a unidade e prefixos compostos devem ser evitados [ex: 1 pF, e não 1 p F ou 1 µµF; 1 nm, e não 1mµm].

Escrita de Unidades

- h) O agrupamento formado pelo símbolo do prefixo ligado ao símbolo da unidade constitui-se em um novo e inseparável símbolo, de modo que pode ser elevado a potências positivas ou negativas e ser combinado com outros símbolos de unidades para formar símbolos de unidades compostas. Desta forma, um expoente se aplica à unidade como um todo, incluindo o seu prefixo [ex: 1 cm3 = (10-2 m)3 = 10-6 m3; 1 cm-1 = (10-2 m) -1 = 102 m-1; 1μs-1= (10-6 s) -1 = 106 s-1; 1 V/cm = (1 V)/(10-2 m) = 102 V/m].
- i) Quando um múltiplo ou submúltiplo de uma unidade é escrito por completo, o prefixo deve ser também escrito por completo, começando com letra minúscula [ex: megahertz, e não Megahertz ou Mhertz].
- j) O quilograma é a única unidade de base cujo nome, por razões históricas, contém um prefixo. Seus múltiplos e submúltiplos são formados adicionando-se os prefixos à palavra "grama" [ex: 10-6 kg = 1 mg = 1 miligrama e não 1 microquilograma ou 1μkg].
- k) A multiplicação de unidades deve ser indicada inserindo-se um ponto"elevado", ou deixando-se um espaço entre as unidades [ex: ou N m].
- l) A divisão pode ser indicada tanto pelo uso de uma barra inclinada, de uma barra de fração horizontal ou por um expoente negativo [ex: m/s, ou , ou], mas o uso repetido da barra inclinada não é permitido [ex: m/s2, mas não m/s/s; m kg/ (s3 A), mas não m kg/s3/A]. Para se evitar má interpretação, quando mais de uma unidade aparece no denominador, deve-se utilizar parêntesis ou expoentes negativos [ex: W/(m2 K4) ou W m-2 K-4].

Escrita de Unidades

- m) Os nomes das unidades não devem ser misturados com os símbolos das operações matemáticas [ex: pode-se escrever "metro por segundo", mas não metro/segundo ou metro segundo-1].
- n) Quando o produto de duas unidades é escrito por extenso, recomenda-se o uso de espaço entre elas mas nunca o uso do ponto. É tolerável o emprego de hífen nestes casos [ex: deve-se escrever newton metro ou newton-metro, mas não newtonmetro].
- Números com mais de quatro dígitos devem ser separados por um espaço a cada grupo de tres dígitos. Nunca utilizar pontos ou vírgulas nas separações, para evitar confusões com as marcações de decimais [ex: 299 792 458, mas não 299.792.458 ou 299,792,458]. Esta convenção é também aplicada à direita do marcador de decimais [ex: 22,989 8].
- o) O valor numérico e o símbolo da unidade devem ser separados por um espaço, mesmo quando usados como um adjetivo [ex: 35 mm, mas não 35mm ou 35-mm].
- p) Deve-se colocar um zero antes do marcador de frações decimais [ex: 0,3 J ou 0.3 J ao invés de ,3 J ou .3 J].
- q) Sempre que possível, o prefixo de uma unidade deve ser escolhido dentro de um intervalo adequado, geralmente entre 0,1 e 1000 [ex: 250 kN; 0,6 mA].

Próxima Aula

- Escalares e Vetores.
- Lei dos Senos.
- Lei dos Cossenos.
- Regra do Paralelogramo

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 2 – Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Cálculo de Força Resultante.
- Operações Vetoriais.
- Lei dos Senos.
- Lei dos Cossenos.

Grandezas Escalares

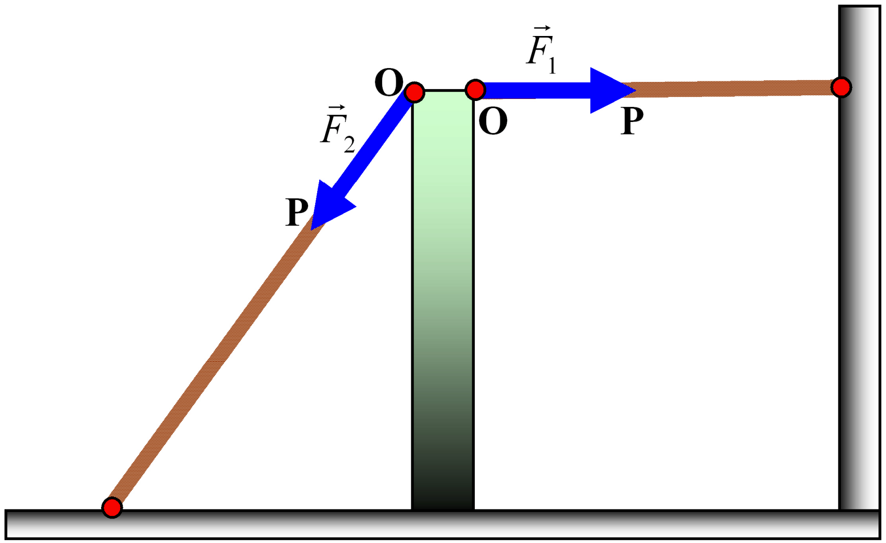
- Uma grandeza escalar é caracterizada por um número real. Como exemplo de escalares podem se citar: o tempo, a massa, o volume, o comprimento, etc.

Grandezas Vetoriais

- Uma grandeza vetorial é caracterizada pela dependência de três elementos fundamentais, ou seja, representa um ente matemático que possui intensidade, direção e sentido. Em problemas de estática é muito comum a utilização de grandezas vetoriais como posição, força e momento.
- A posição de um ponto no espaço em relação a outro ponto caracteriza uma grandeza vetorial. Para descrever a posição de uma cidade **A** em relação à outra cidade **B**, é insuficiente dizer que ambas estão separadas por uma distância de 100 km, para se caracterizar um vetor, deve-se dizer por exemplo, que a cidade **B** se encontra 100 km a oeste da cidade **A**.
- A força também é caracterizada como uma grandeza vetorial, pois quando se empurra uma peça de móvel através do chão aplica-se na mesma uma força com intensidade suficiente para mover o móvel e com a direção desejada para o movimento.

Representação de uma Grandeza Vetorial

- Uma grandeza vetorial pode ser representada graficamente por uma seta, que é utilizada para definir seu módulo, sua direção e seu sentido. Graficamente o módulo de um vetor é representado pelo comprimento da seta, a direção é definida através do ângulo formado entre um eixo de referência e a linha de ação da seta e o sentido é indicado pela extremidade da seta.
- A figura mostra a representação gráfica de dois vetores força atuando ao longo dos cabos de fixação de um poste, o ponto **O** é chamado de origem do vetor e o ponto **P** representa sua extremidade ou ponta.

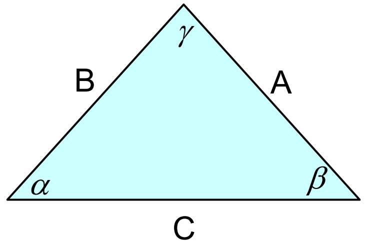


Solução Escalar

- Praticamente todos os problemas envolvendo os conceitos de soma e subtração vetorial, bem como a determinação das componentes de um vetor podem ser resolvidos a partir das leis dos senos e dos cossenos, que representam propriedades fundamentais da trigonometria e são descritas a seguir a partir da figura a seguir e das respectivas equações.

Lei dos Senos e dos Cossenos

- Dado um triângulo ABC e seus ângulos internos α, β e γ, a lei dos senos é definida da seguinte forma: "Em todo triângulo, as medidas dos seus lados são proporcionais aos senos dos lados opostos".



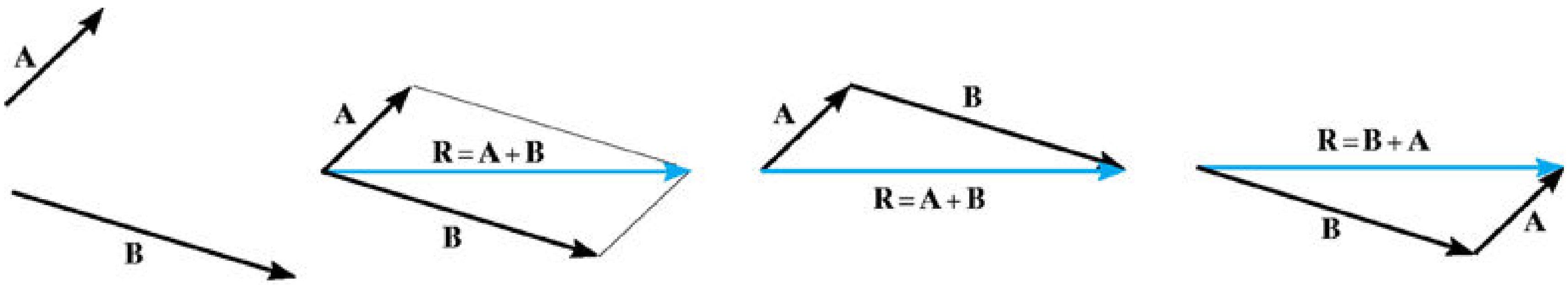
$$\frac{A}{sen\alpha} = \frac{B}{sen\beta} = \frac{C}{sen\gamma}$$

- A partir do mesmo triângulo ABC e seus ângulos internos α, β e γ, a lei dos cossenos é definida do seguinte modo: "Num triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado".

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}$$

Soma Vetorial – Regra do Paralelogramo

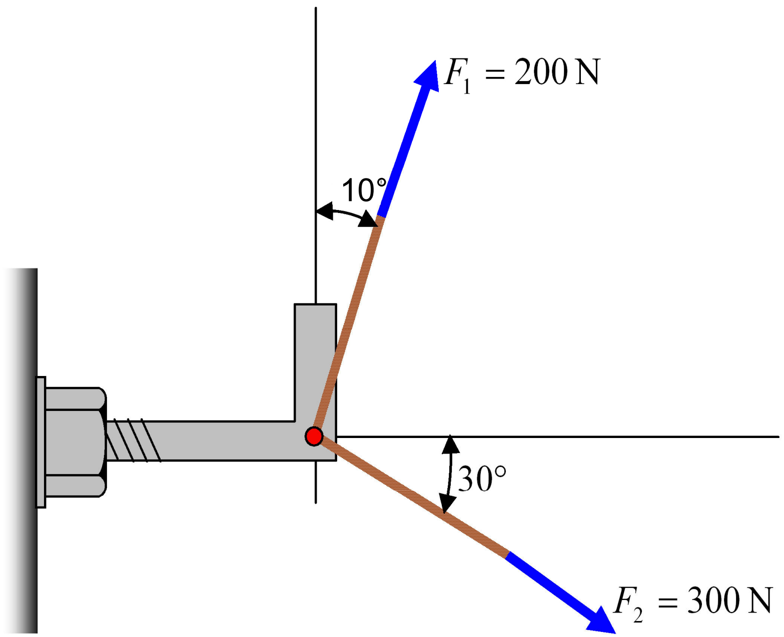
- O Cálculo da força resultante pode ser obtido através da soma vetorial com a aplicação da regra do paralelogramo.



(a) Lei do Paralelogramo (b) Construção do triângulo (c) Construção do triângulo (d)

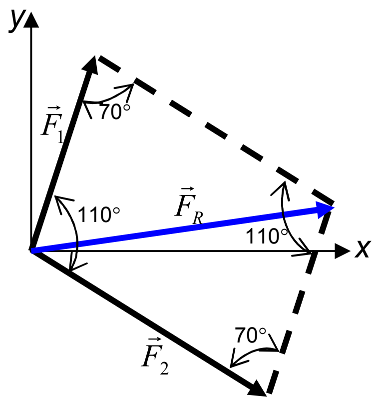
Exercício 1

- 1) O parafuso mostrado na figura está sujeito a duas forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$. Determine o módulo e a direção da força resultante.

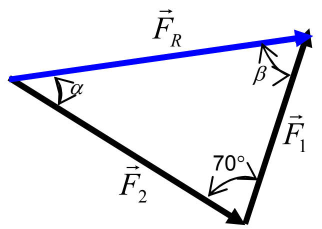


Solução do Exercício 1

Construir um esquema aplicando a regra do paralelogramo de forma a identificar quais são as incógnitas do problema.



A partir do paralelogramo obtido na figura, pode-se construir o triângulo de vetores.



Aplicando-se a lei dos cossenos, determina-se o módulo da força resultante F_R.

$$F_R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma}$$

$$F_R = \sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cdot \cos 70°}$$

$$F_R = 298{,}25 \text{ N}$$

O ângulo α é determinado a partir da lei dos senos, utilizando-se o valor calculado para F_R.

$$\frac{F_1}{sen\alpha} = \frac{F_R}{sen\gamma} \Rightarrow sen\alpha = \frac{F_1 \cdot sen\gamma}{F_R}$$

$$\alpha = asen\left(\frac{F_1 \cdot sen\gamma}{F_R}\right) \Rightarrow \alpha = asen\left(\frac{200 \cdot sen70°}{298{,}25}\right)$$

$$\alpha = 39{,}06°$$

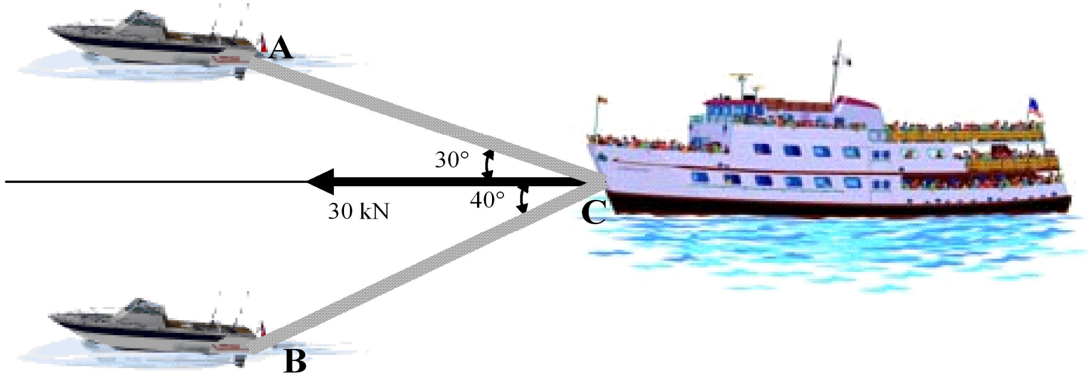
Com relação ao eixo *x* positivo, o ângulo θ é dado por:

$$\theta = \alpha - \delta \Rightarrow \theta = 39{,}06° - 30° \Rightarrow \theta = 9{,}06°$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

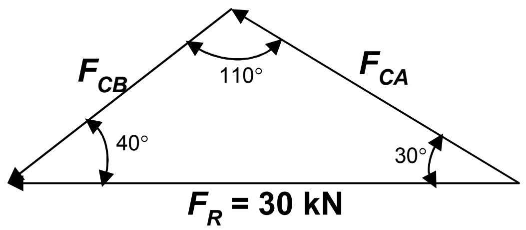
Exercício 2

- 2) Duas lanchas rebocam um barco de passageiros que se encontra com problemas em seus motores. Sabendo-se que a força resultante é igual a 30kN, encontre suas componentes nas direções **AC** e **BC**.



Solução do Exercício 2

A partir da regra do paralelogramo, deve-se construir um triângulo de vetores envolvendo as forças atuantes nos cabos **CA** e **CB** e a força resultante, de forma a identificar as incógnitas do problema.



A partir da aplicação da lei dos senos, pode-se determinar os módulos das forças atuantes em cada um dos cabos **CA** ou **CB** da seguinte forma.

$$\frac{F_R}{sen110°} = \frac{F_{CA}}{sen40°} = \frac{F_{CB}}{sen30°}$$

Resolvendo para F_{CA} tem-se que:

$$F_{CA} = \frac{F_R \cdot sen40°}{sen110°} = \frac{30 \cdot sen40°}{sen110°}$$

$$F_{CA} = 20{,}52 \text{ kN}$$

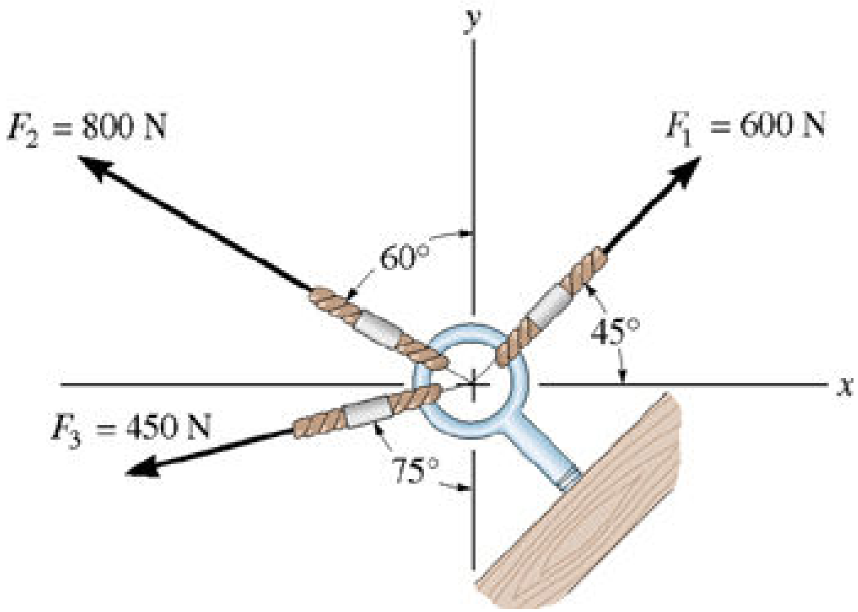
Resolvendo para F_{CB} tem-se que:

$$F_{CB} = \frac{F_R \cdot sen30°}{sen110°} = \frac{30 \cdot sen30°}{sen110°}$$

$$F_{CB} = 15{,}96 \text{ kN}$$

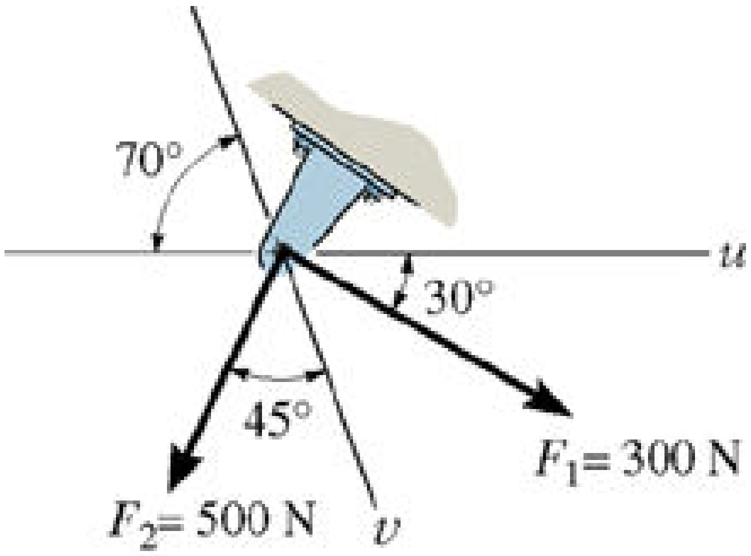
Exercícios Propostos

- 1) Determine a intensidade da força resultante e indique sua direção, medida no sentido anti-horário, em relação ao eixo *x* positivo.



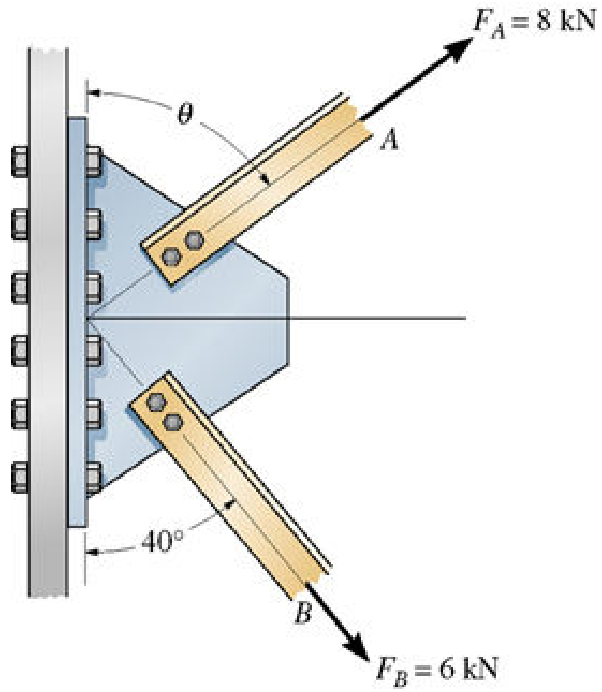
Exercícios Propostos

- 2) Determine a intensidade da força resultante e indique sua direção, medida no sentido anti-horário, em relação ao eixo *u* positivo.



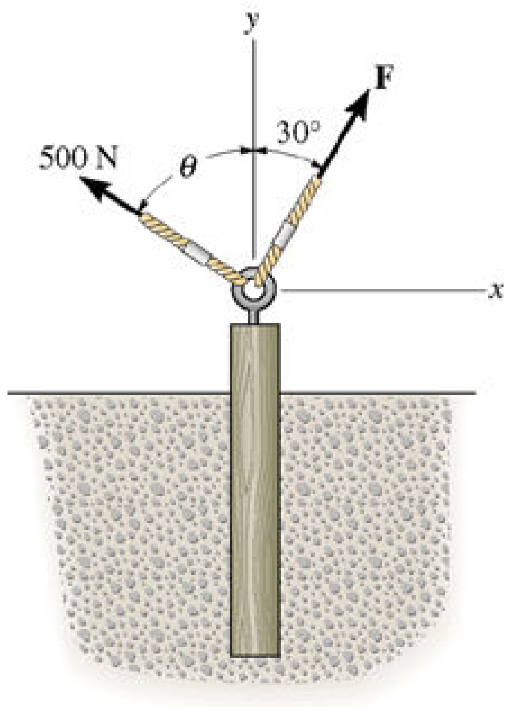
Exercícios Propostos

- 3) A chapa está submetida a duas forças $\boldsymbol{F_A}$ e $\boldsymbol{F_B}$ como mostra a figura. Se θ = 60º, determine a intensidade da força resultante e sua intensidade em relação ao eixo horizontal.



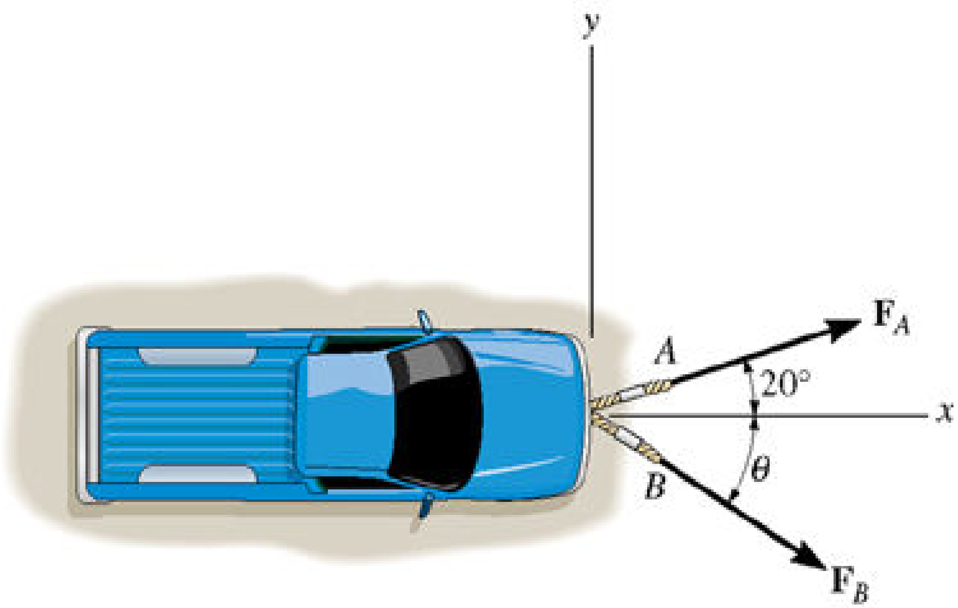
Exercícios Propostos

- 4) Duas forças são aplicadas ao olhal a fim de remover a estaca mostrada. Determine o ângulo θ e o valor da força ***F*** de modo que a força resultante seja orientada verticalmente para cima no eixo *y* e tenha uma intensidade de 750N.



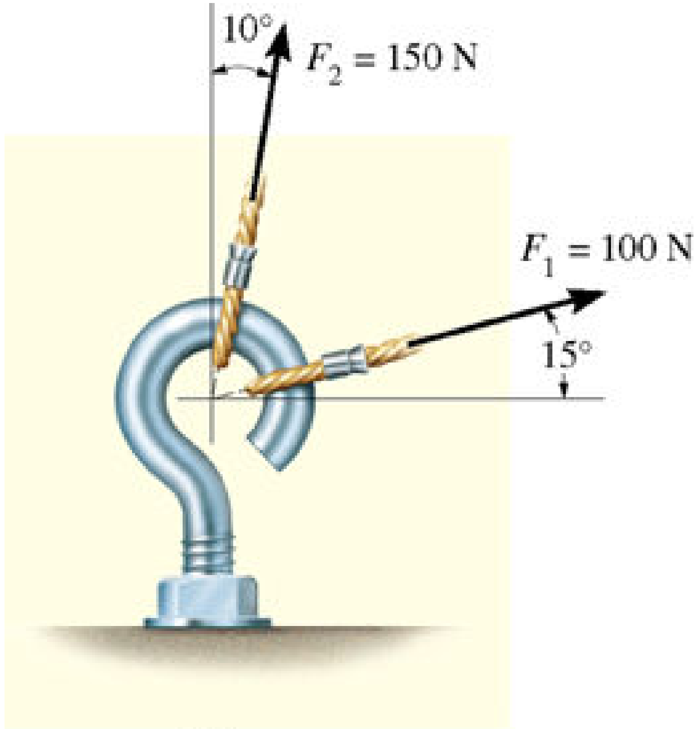
Exercícios Propostos

- 5) A caminhonete mostrada é rebocada por duas cordas. Determine os valores de $\boldsymbol{F_A}$ e $\boldsymbol{F_B}$ de modo a produzir uma força resultante de 950N oreintada no eixo x positivo, considere $\theta = 50º$.



Exercícios Propostos

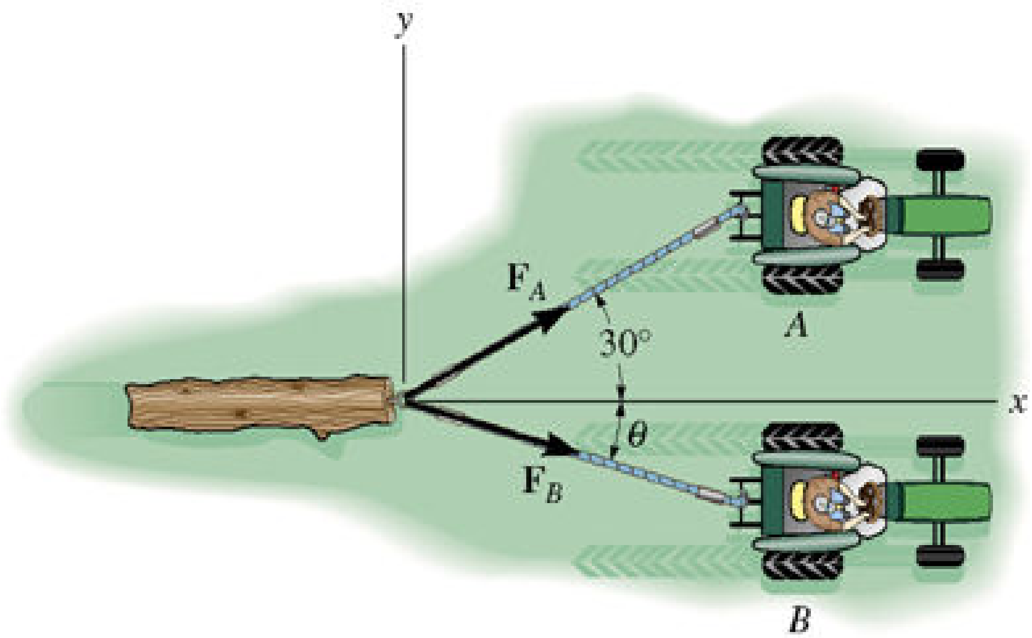
- 6) O parafuso tipo gancho mostrado na figura está sujeito a duas forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$. Determine o módulo e a direção da força resultante.



(a)

Exercícios Propostos

- 7) A tora de madeira é rebocada pelos dois tratores mostrados, sabendo-se que a força resultante é igual a 10kN e está orientada ao longo do eixo *x* positivo, determine a intensidade das forças $\boldsymbol{F_A}$ e $\boldsymbol{F_B}$.
- Considere $\theta = 15º$.



Próxima Aula

- Sistemas de Forças Coplanares.
- Determinação de Força Resultante.
- Componentes de um Vetor Cartesiano.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 3 – Sistemas de Forças Coplanares, Vetores Cartesianos

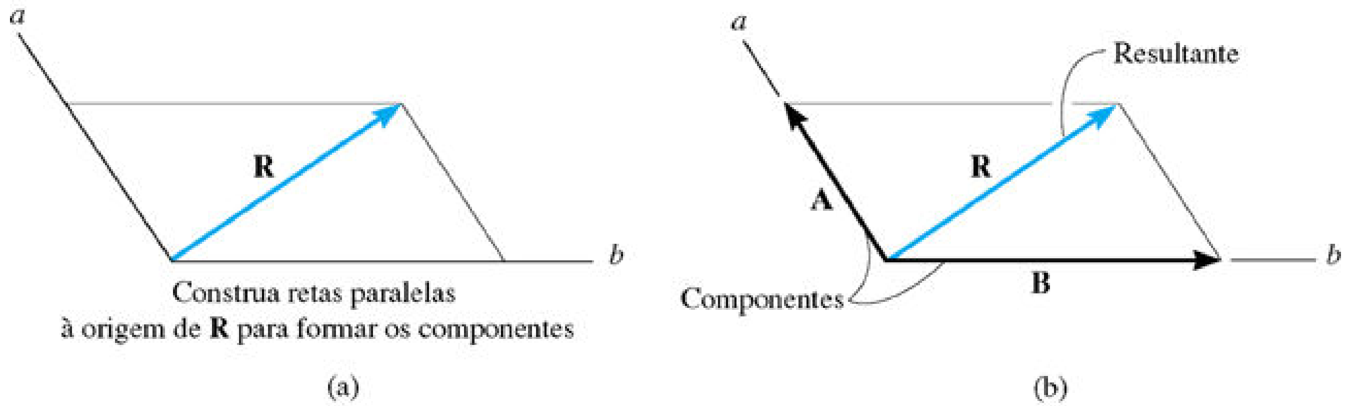
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Sistemas de Forças Coplanares.
- Determinação de Força Resultante.
- Componentes de um Vetor Cartesiano.

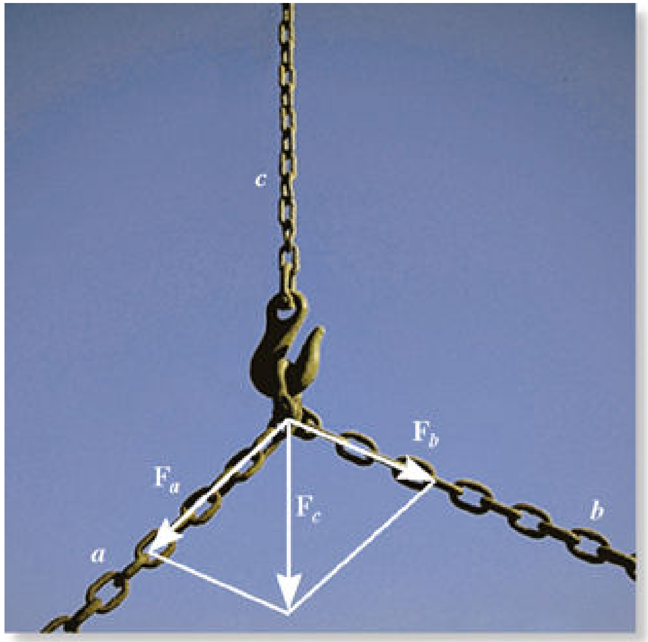
Componentes de um Vetor

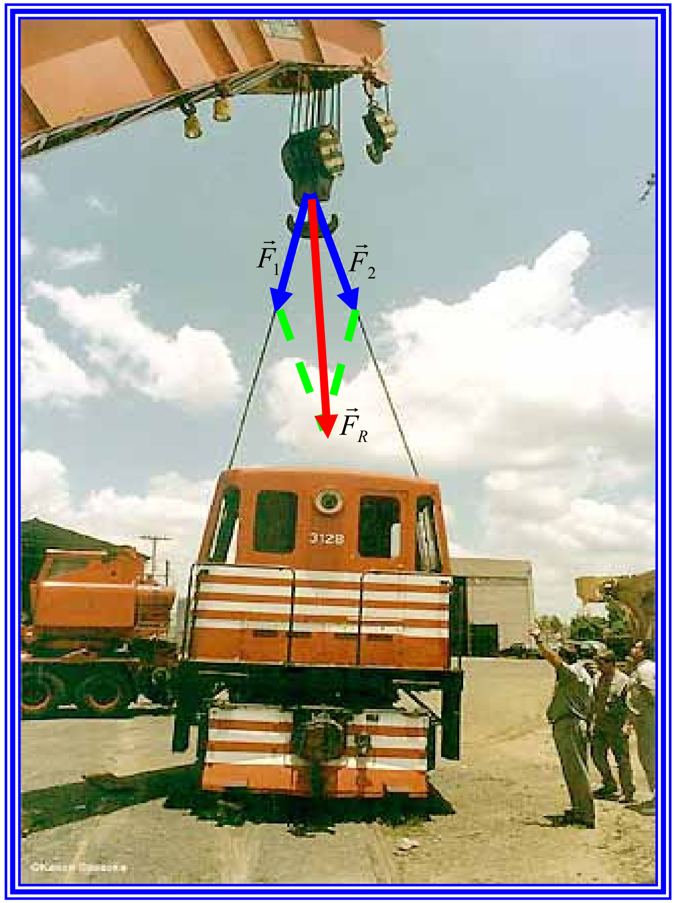
- Quando um vetor **R** é expresso segundo a soma de dois vetores **A** e **B**, cada um dos vetores **A** e **B** são chamados de componentes de **R**, portanto, um vetor resultante pode ser decomposto em duas componentes a partir da aplicação da regra do paralelogramo. Um exemplo de decomposição vetorial pode ser observado na figura a seguir, onde, conhecendo-se as linhas de ação de cada componente, o vetor **R** pode ser decomposto formando os vetores **A** e **B**.



Decomposição de um vetor

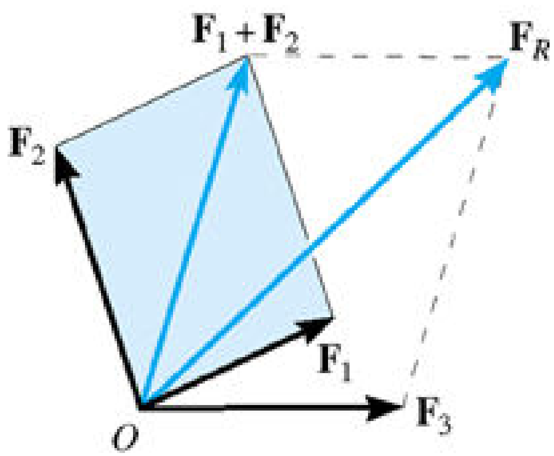
Força Resultante





Adição de Forças Vetoriais

- Quando os problemas envolvem a adição de mais de duas forças, pode-se aplicar de modo sucessivo a regra do paralelogramo ou o triângulo de vetores de modo a se obter a força resultante. Um exemplo desse tipo de situação é mostrado na figura representada a seguir.

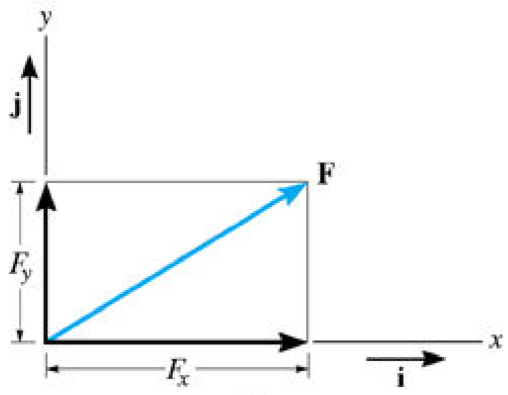


Método das Componentes Retangulares

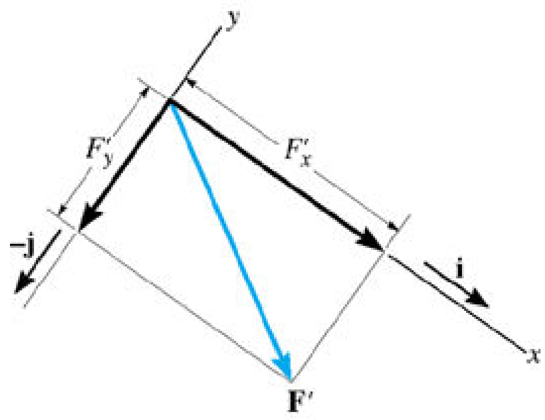
- Assim, pode-se notar que quanto maior o número de forças envolvidas no sistema, maior é o tempo dispensado para encontrar a força resultante, pois se necessita da aplicação da regra do paralelogramo sucessivas vezes gerando um cansativo trabalho de geometria e trigonometria para se determinar o valor numérico da resultante do sistema e sua respectiva direção.
- Porém, este exaustivo processo é suprido de forma rápida através da aplicação de uma metodologia que utiliza uma soma algébrica das componentes de cada um dos vetores força que formam o sistema.
- Este método é denominado "método das componentes retangulares" e consiste em trabalhar apenas com as componentes dos vetores, formando desse modo um sistema de forças colineares projetados nos eixos de coordenadas do sistema de referência.

Decomposição de Forças

- Convenção de Sinais.
- *x* – Positivo para a direita, negativo para a esquerda.
- *y* – Positivo para cima, negativo para baixo.
- No plano, utilizam-se os versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$.



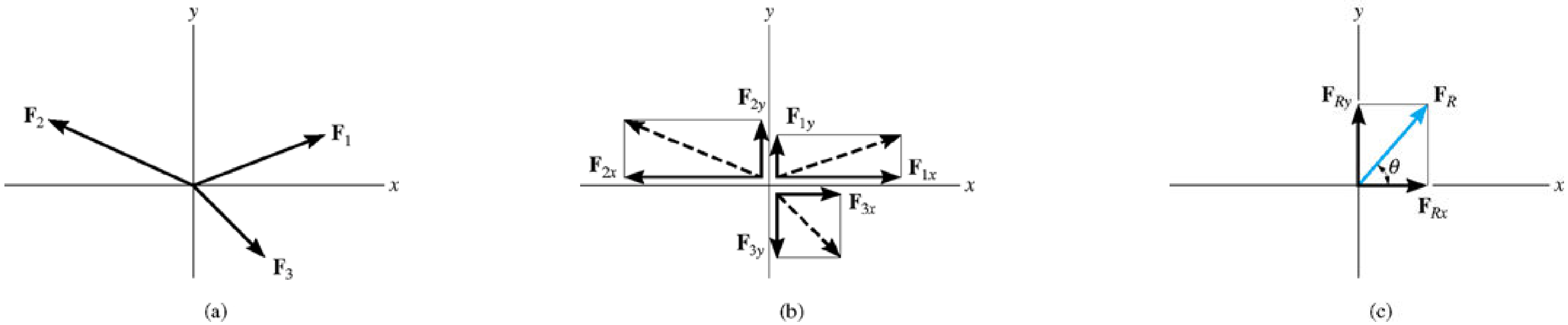
(a)



(b)

Redução a uma Única Força Resultante

- Decompor as forças nos eixos *x* e *y*.
- Utilizar trigonometria, decomposição em seno e cosseno.



Vetores Cartesianos:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = -F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = F_{3x}\vec{i} - F_{3y}\vec{j}$$

Força Resultante:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n$$

Soma Vetorial

Módulo e Direção da Força Resultante

Módulo da Força Resultante:

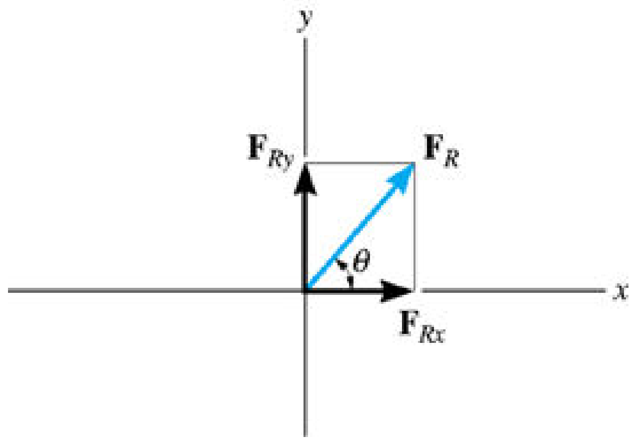
$$F_{Rx} = \sum F_x$$

$$F_{Ry} = \sum F_y$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^{\ 2} + F_{Ry}^{\ 2}}$$

Direção da Força Resultante:

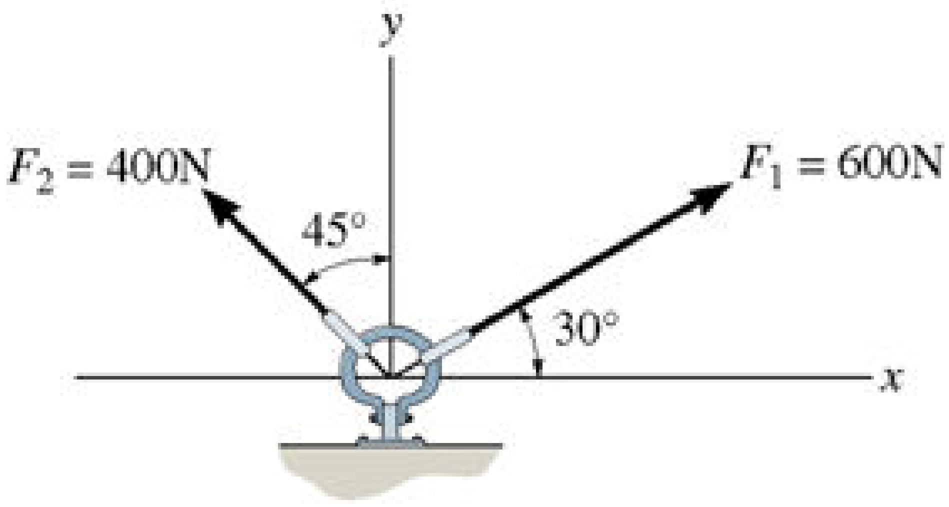
$$\theta = arctg\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right)$$



(c)

Exercício 1

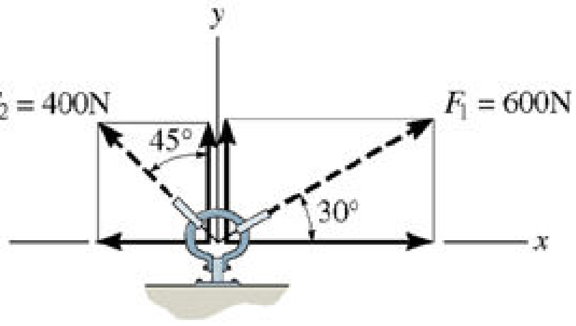
- 1) O elo da figura está submetido as forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$, determine a intensidade e a orientação da força resultante.



(a)

Solução do Exercício 1

Decomposição das Forças:



(b)

Força 1:

$$\vec{F}_1 = (F_1 \cdot \cos 30^\circ \vec{i} + F_1 \cdot sen 30^\circ \vec{j})$$

$$\vec{F}_1 = (600 \cdot \cos 30^\circ \vec{i} + 600 \cdot sen 30^\circ \vec{j})\text{N}$$

Força 2:

$$\vec{F}_2 = (-F_2 \cdot \cos 45^\circ \vec{i} + F_2 \cdot sen 45^\circ \vec{j})$$

$$\vec{F}_2 = (-400 \cdot \cos 45^\circ \vec{i} + 400 \cdot sen 45^\circ \vec{j})\text{N}$$

Força Resultante:

$$\vec{F}_R = (600 \cdot \cos 30^\circ \vec{i} + 600 \cdot sen 30^\circ \vec{j}) + (-400 \cdot \cos 45^\circ \vec{i} + 400 \cdot sen 45^\circ \vec{j})$$

$$\vec{F}_R = (600 \cdot \cos 30^\circ - 400 \cdot \cos 45^\circ)\vec{i} + (600 \cdot sen 30^\circ + 400 \cdot sen 45^\circ)\vec{j}$$

$$\vec{F}_R = (236{,}8\vec{i} + 582{,}8\vec{j})\text{N}$$

Solução do Exercício 1

Módulo da Força Resultante:

$$F_R = \sqrt{(236{,}8^2 + 582{,}8^2}$$

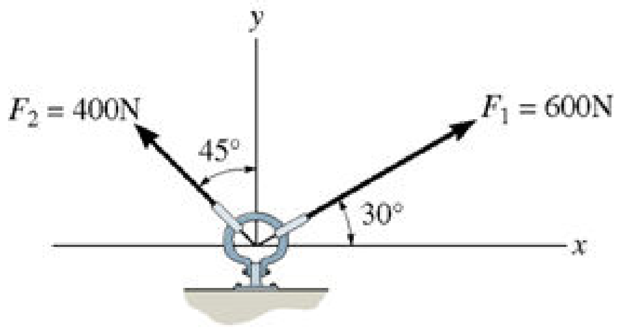
$$F_R = 629\text{N}$$

Direção da Força Resultante:

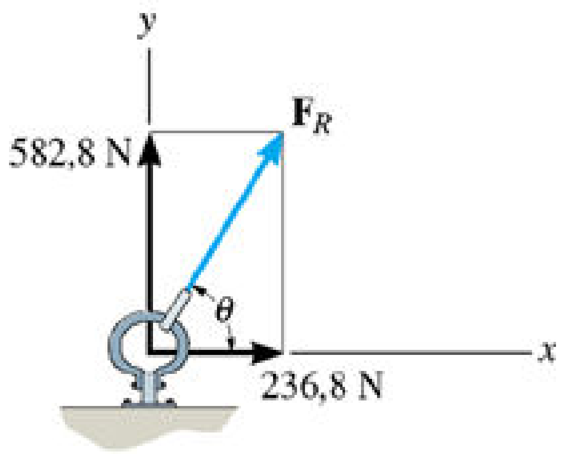
$$\theta = arctg\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

$$\theta = arctg\left(\frac{582{,}8}{236{,}8}\right)$$

$$\theta = 67{,}9°$$



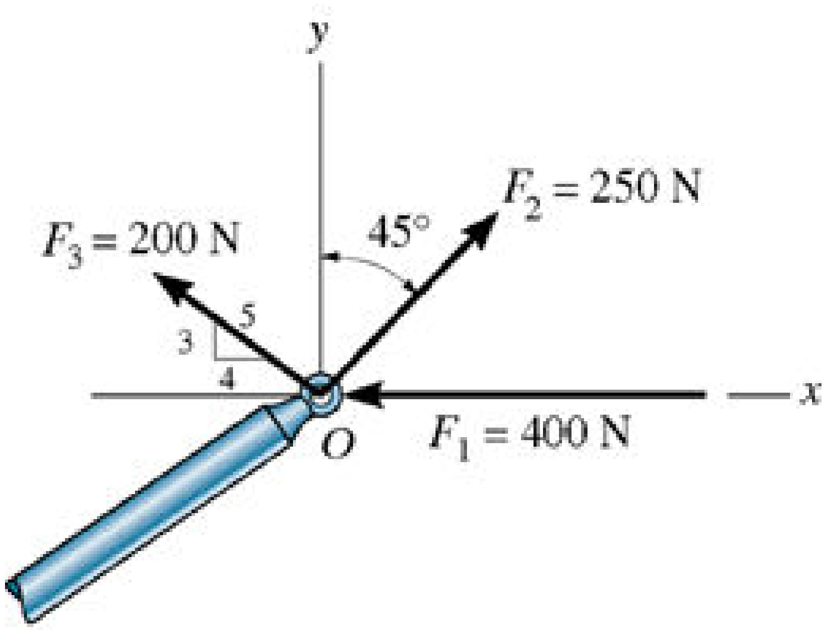
(a)



(c)

Exercício 2

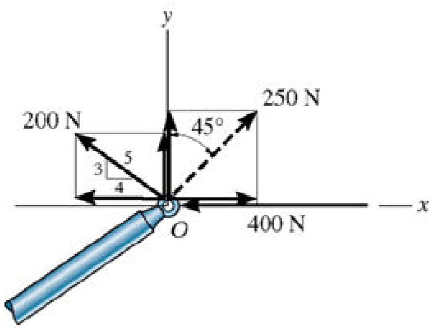
- 2) A extremidade da barra está submetida a três forças concorrentes e coplanares. Determine a intensidade e a orientação da força resultante.



(a)

Solução do Exercício 2

Decomposição das Forças:



(b)

Força 1:

$$\vec{F}_1 = (-400\vec{i}\,)\text{N}$$

Força 2:

$$\vec{F}_2 = (F_2 \cdot sen45^{\circ}\,\vec{i} + F_2 \cdot \cos 45^{\circ}\,\vec{j}\,)$$

$$\vec{F}_2 = (250 \cdot sen45^{\circ}\,\vec{i} + 250 \cdot \cos 45^{\circ}\,\vec{j}\,)\text{N}$$

Força 3:

$$\vec{F}_3 = \left(-F_3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)\vec{i} + F_3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_3 = \left(-200 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)\vec{i} + 200 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_3 = (-160\vec{i} + 120\vec{j}\,)\text{N}$$

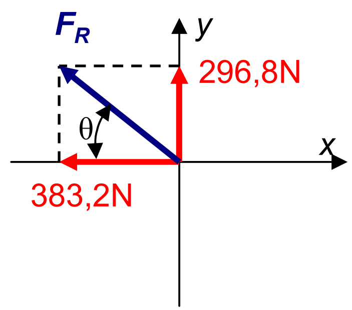
Solução do Exercício 2

Força Resultante:

$$\vec{F}_R = (-400\vec{i}\,) + (250 \cdot sen45^{\circ}\,\vec{i} + 250 \cdot \cos 45^{\circ}\,\vec{j}\,) + (-160\vec{i} + 120\vec{j}\,)$$

$$\vec{F}_R = (-400 + 250 \cdot sen45^{\circ} - 160)\vec{i} + (250 \cdot \cos 45^{\circ} + 120)\vec{j}$$

$$\vec{F}_R = (-383{,}2\vec{i} + 296{,}8\vec{j}\,)\ \text{N}$$



Módulo da Força Resultante:

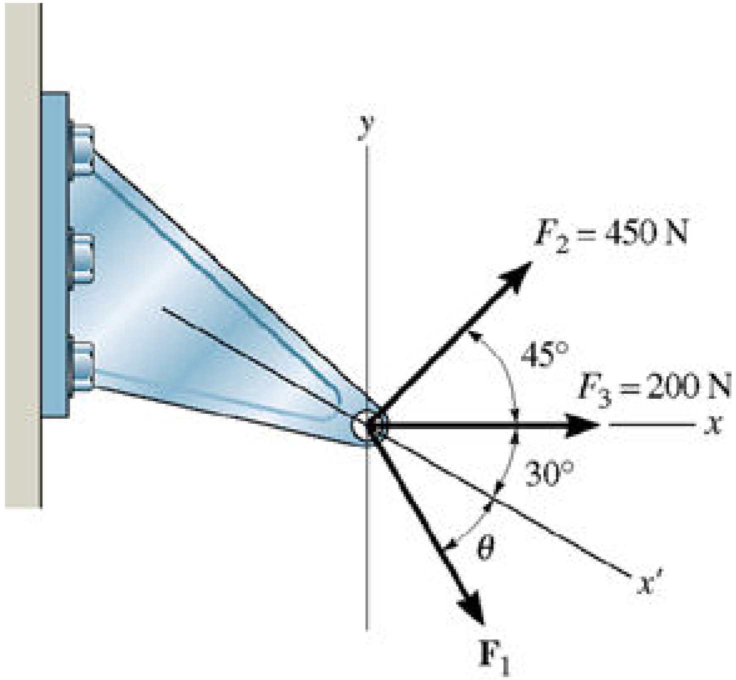
$$F_R = \sqrt{(383{,}2^2 + 296{,}8^2} \rightarrow F_R = 485\text{N}$$

Direção da Força Resultante:

$$\theta = arctg\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \rightarrow \theta = arctg\left(\frac{296{,}8}{383{,}2}\right) \rightarrow \theta = 37{,}8^{\circ}$$

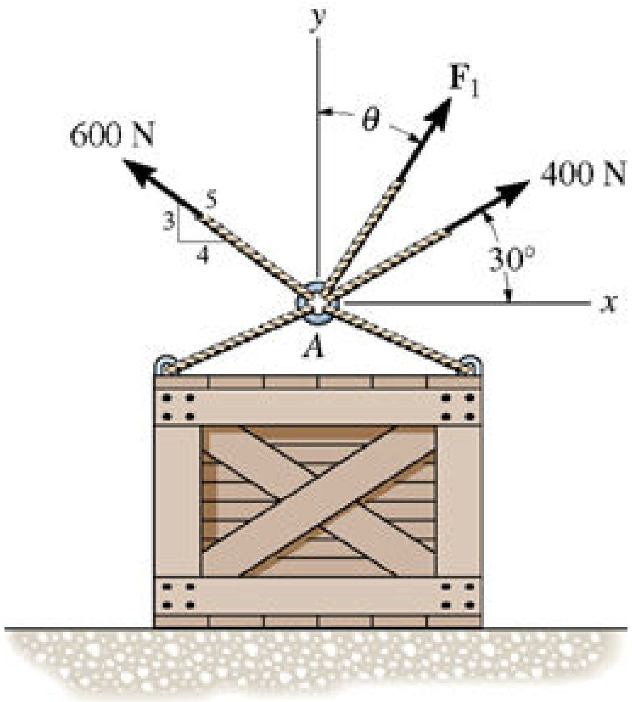
Exercícios Propostos

- 1) Três forças atuam sobre o suporte mostrado. Determine o ângulo θ e a intensidade de $\boldsymbol{F_1}$ de modo que a resultante das forças seja orientada ao longo do eixo *x’* positivo e tenha intensidade de 1kN.



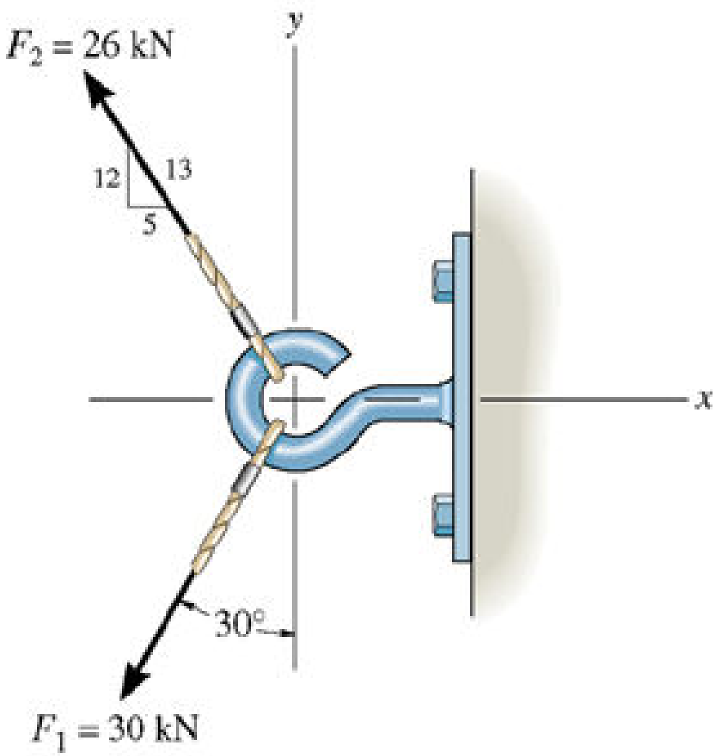
Exercícios Propostos

- 2) Determine o ângulo θ e a intensidade de $\boldsymbol{F_1}$ de modo que a resultante das forças seja orientada ao longo do eixo *y* positivo e tenha intensidade de 800N.



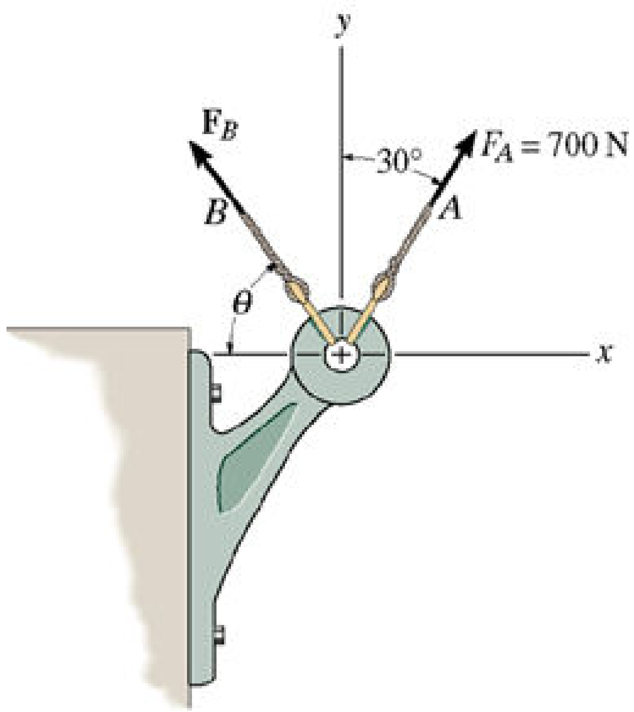
Exercícios Propostos

- 3) O gancho da figura está submetido as forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$, determine a intensidade e a orientação da força resultante.



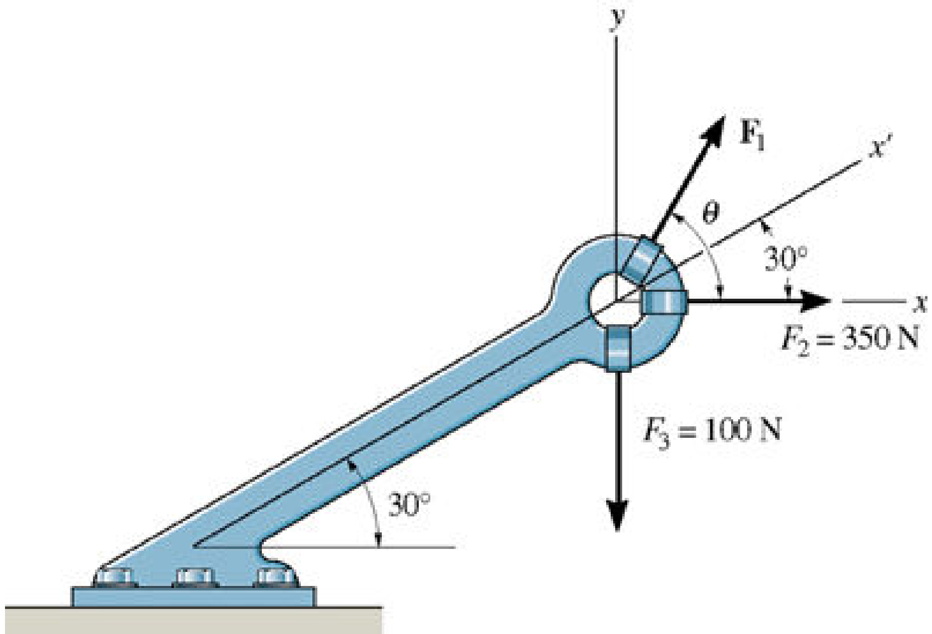
Exercícios Propostos

- 4) Determine o ângulo θ e a intensidade de $\boldsymbol{F_B}$ de modo que a resultante das forças seja orientada ao longo do eixo *y* positivo e tenha intensidade de 1500N.



Exercícios Propostos

- 5) Determine o ângulo θ e a intensidade de $\boldsymbol{F_1}$ de modo que a resultante das forças seja orientada ao longo do eixo *x'* positivo e tenha intensidade de 600N.



Próxima Aula

- Operações com Vetores Cartesianos.
- Vetor Unitário.
- Ângulos Diretores Coordenados

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 4 – Adição e Subtração de Vetores Cartesianos

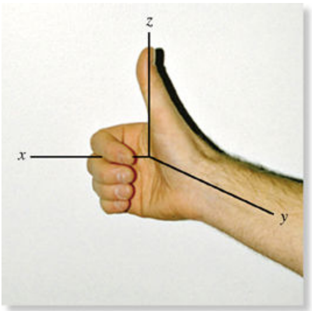
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

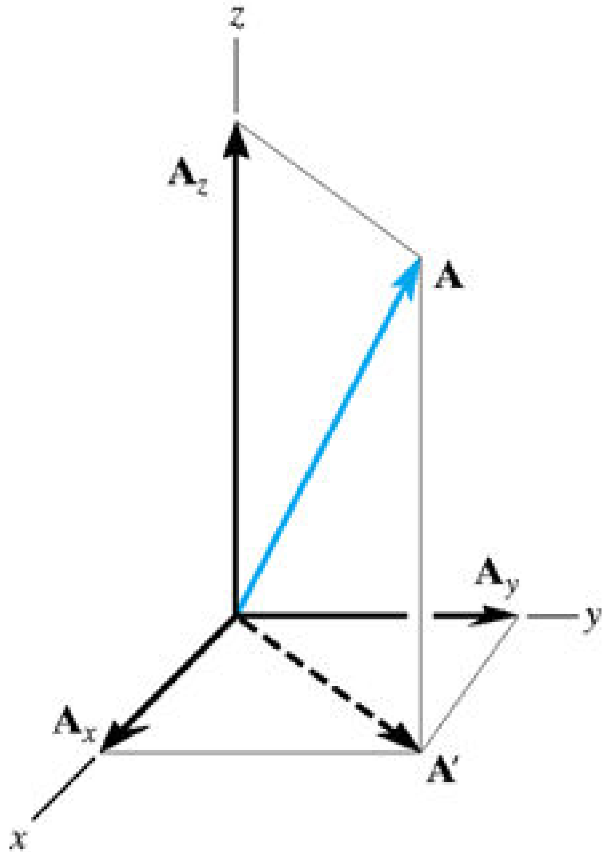
- Operações com Vetores Cartesianos.
- Vetor Unitário.
- Ângulos Diretores Coordenados.

Componentes retangulares de um vetor

- Um vetor ***A*** pode ter um, dois ou três componentes ao longo dos eixos de coordenadas *x*, *y* e *z*.
- A quantidade de componentes depende de como o vetor está orientado em relação a esses eixos.
- Sistema de coordenadas utilizando a regra da mão direita.

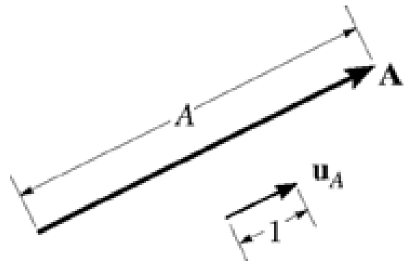


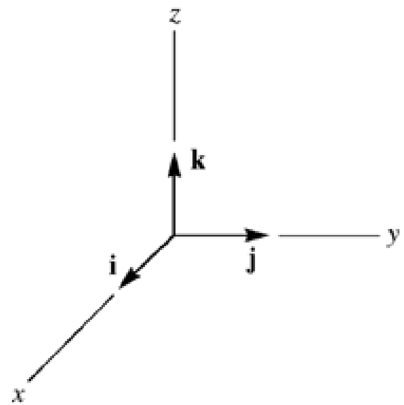
Sistema de coordenadas da mão direita



Vetor Unitário

- A direção de ***A*** é especificada usando-se um vetor unitário, que possui esse nome por ter intensidade igual a 1.
- Em três dimensões, o conjunto de vetores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ é usado para designar as direções dos eixos *x*, *y* e *z* respectivamente.





Para um vetor A:

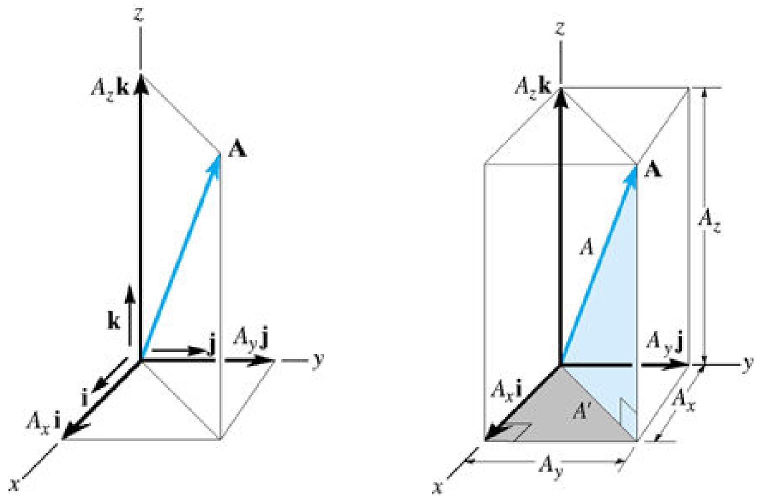
$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

Para um vetor Força:

$$\vec{u}_F = \frac{\vec{F}}{F}$$

Representação de um Vetor Cartesiano

- Um vetor cartesiano é escrito sob a forma de suas componentes retangulares.
- As componentes representam a projeção do vetor em relação aos eixos de referência.
- Quando se escreve um vetor na forma cartesiana suas componentes ficam separadas em cada um dos eixos e facilita a solução da álgebra vetorial.



Vetor cartesiano:

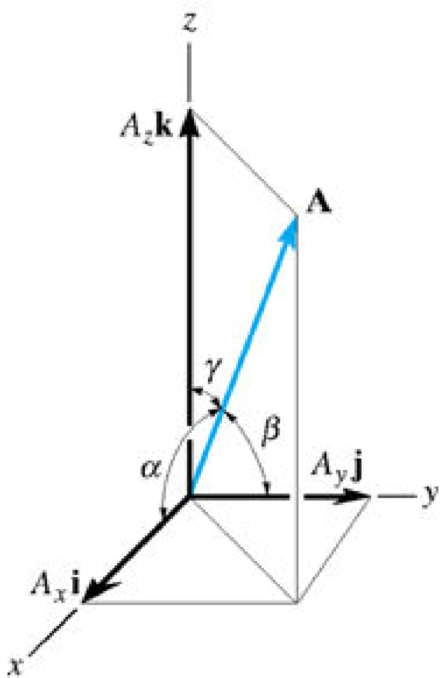
$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

Módulo do vetor cartesiano:

$$A = \sqrt{A_x^{\;2} + A_y^{\;2} + A_z^{\;2}}$$

Ângulos Diretores Coordenados

- A orientação de um vetor no espaço é definida pelos ângulos diretores coordenados α, β, e γ medidos entre a origem do vetor e os eixos positivos x, y e z.

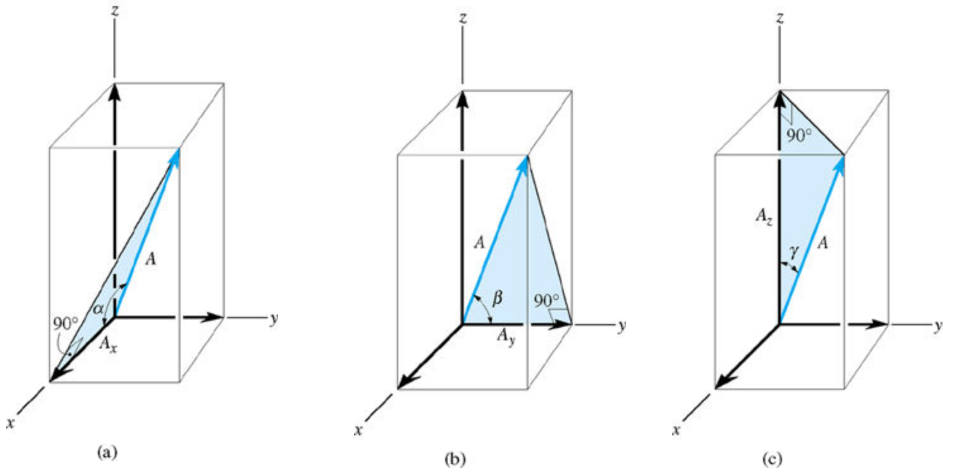


$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}_x}{A}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{A}_y}{A}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{A}_z}{A}$$

Determinação dos Ângulos Diretores Coordenados



$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\vec{i} + \frac{A_y}{A}\vec{j} + \frac{A_z}{A}\vec{k}$$

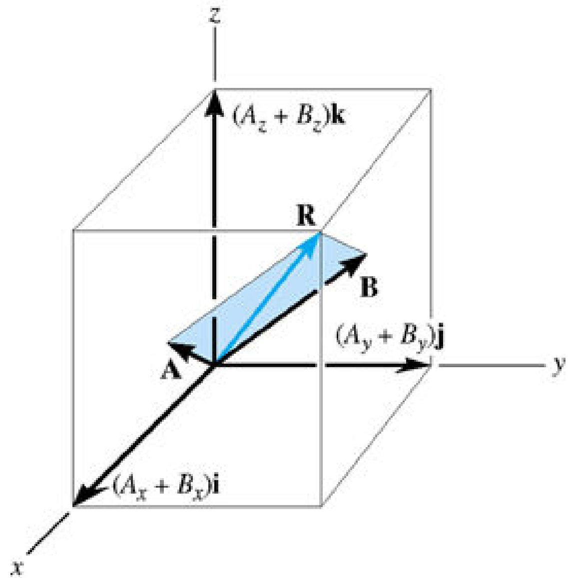
$$\vec{u}_A = \cos\alpha \;\; \vec{i} + \cos\beta \;\; \vec{j} + \cos\gamma \;\; \vec{k}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Sistemas de Forças Concorrentes

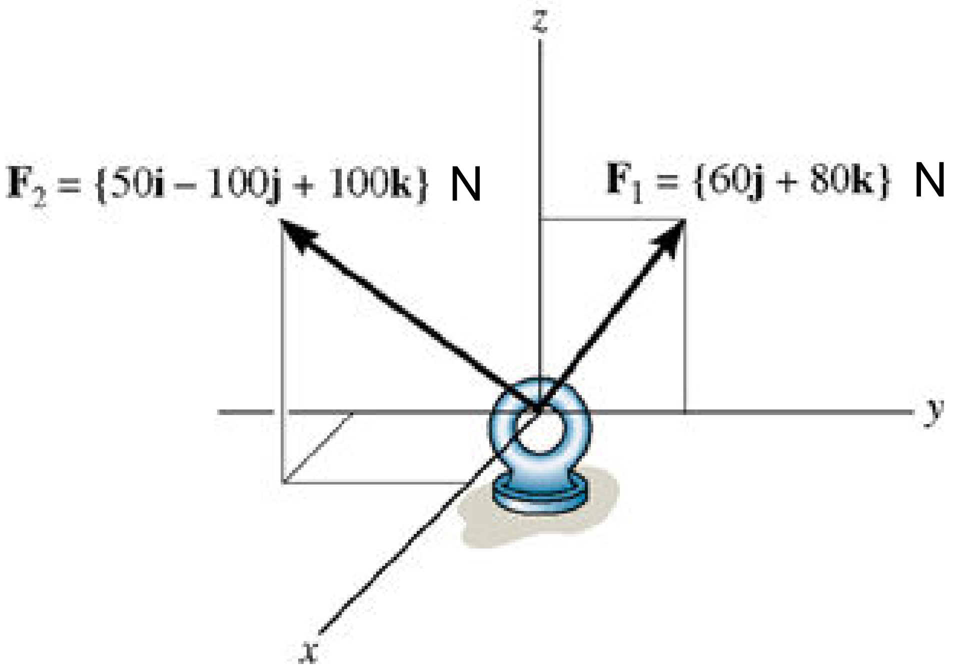
- Se o conceito de soma vetorial for aplicado em um sistema de várias forças concorrentes, a força resultante será a soma de todas as forças do sistema e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$



Exercício 1

- 1) Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante que atua sobre o anel, conforme mostrado na figura.



(a)

Solução do Exercício 1

Vetor força resultante:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

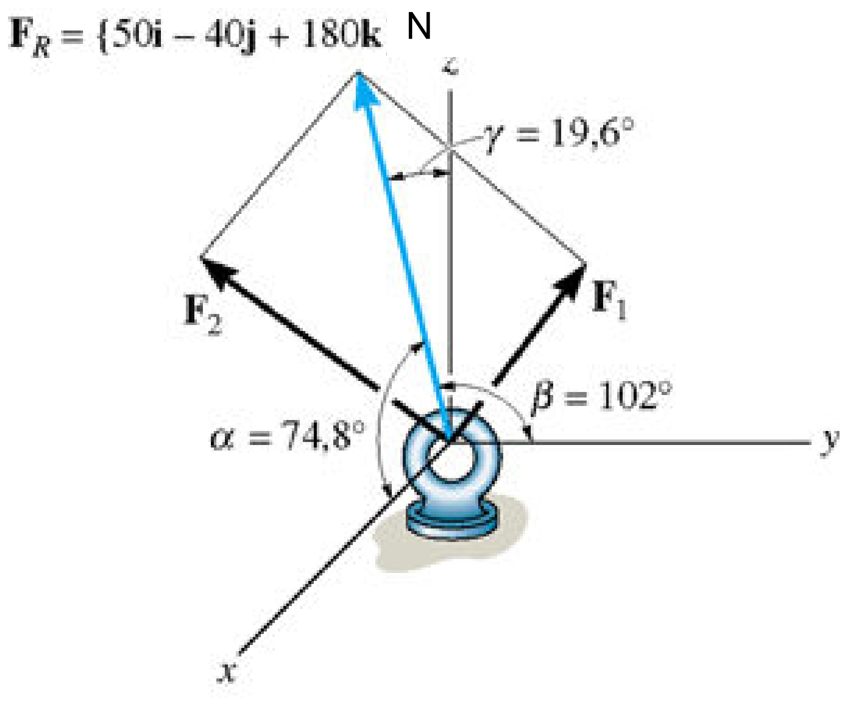
$$\vec{F}_R = (50\vec{i} - 100\vec{j} + 100\vec{k}) + (60\vec{j} + 80\vec{k})$$

$$\vec{F}_R = (50\vec{i} - 40\vec{j} + 180\vec{k})\,\text{N}$$

Módulo da força resultante:

$$F_R = \sqrt{50^2 + 40^2 + 180^2}$$

$$F_R = 191\,\text{N}$$



(b)

Solução do Exercício 1

Vetor unitário da força resultante:

$$\vec{u}_{F_R} = \frac{\vec{F}_R}{F_R} = \frac{F_{Rx}}{F_R}\vec{i} + \frac{F_{Ry}}{F_R}\vec{j} + \frac{F_{Rz}}{F_R}\vec{k}$$

$$\vec{u}_{F_R} = \frac{50}{191}\vec{i} - \frac{40}{191}\vec{j} + \frac{180}{191}\vec{k}$$

$$\vec{u}_{F_R} = 0{,}261\vec{i} - 0{,}209\vec{j} + 0{,}942\vec{k}$$

Ângulos diretores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{F}_{Rx}}{F_R} \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}261$$

$$\alpha = \arccos(0{,}261) \Rightarrow \alpha = 74{,}8°$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{F}_{Ry}}{F_R}$$

$$\cos\beta = -0{,}209$$

$$\beta = \arccos(-0{,}209) \Rightarrow \beta = 102°$$

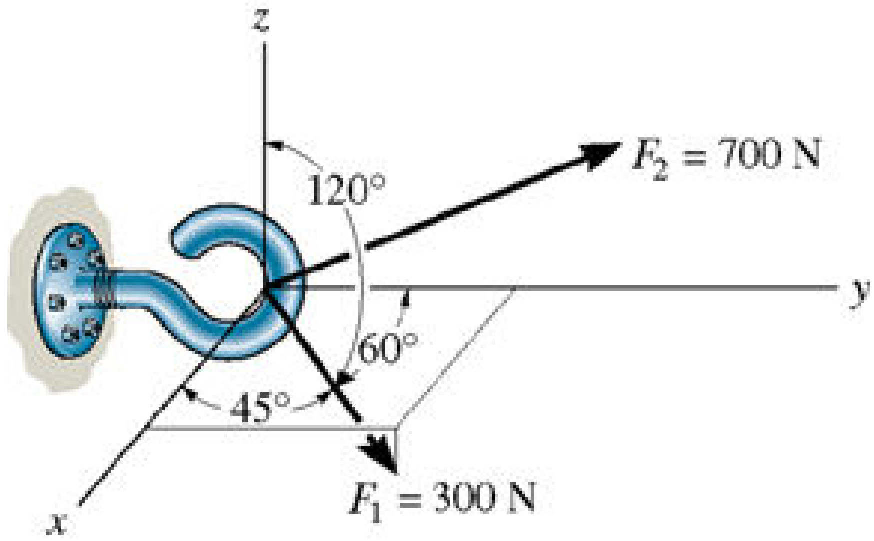
$$\cos\gamma = \frac{\vec{F}_{Rz}}{F_R}$$

$$\cos\gamma = 0{,}942$$

$$\gamma = \arccos(0{,}942) \Rightarrow \gamma = 19{,}6°$$

Exercício 2

- 2) Duas forças atuam sobre o gancho mostrado na figura. Especifique os ângulos diretores coordenados de F_2, de modo que a força resultante F_R atue ao longo do eixo y positivo e tenha intensidade de 800N.



(a)

Solução do Exercício 2

Força Resultante:

$$\vec{F}_R = 800\vec{j} \text{ N}$$

Determinação de F_1:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \cos\alpha_1 \vec{i} + F_1 \cdot \cos\beta_1 \vec{j} + F_1 \cdot \cos\gamma_1 \vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = 300 \cdot \cos 45° \vec{i} + 300 \cdot \cos 60° \vec{j} + 300 \cdot \cos 120° \vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = 212{,}2\vec{i} + 150\vec{j} - 150\vec{k} \text{ N}$$

Determinação de F_2:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$800\vec{j} = 212{,}2\vec{i} + 150\vec{j} - 150\vec{k} + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_2 = 800\vec{j} - 212{,}2\vec{i} - 150\vec{j} + 150\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = -212{,}2\vec{i} + 650\vec{j} + 150\vec{k} \text{ N}$$

Módulo de F_2:

$$F_2 = \sqrt{212{,}2^2 + 650^2 + 150^2}$$

$$F_2 = 700 \text{ N}$$

Solução do Exercício 2

Ângulos Diretores de $\boldsymbol{F_2}$:

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{F_{2x}}{F_2}\right)$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{-212,2}{700}\right)$$

$$\alpha_2 = 108°$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{F_{2y}}{F_2}\right)$$

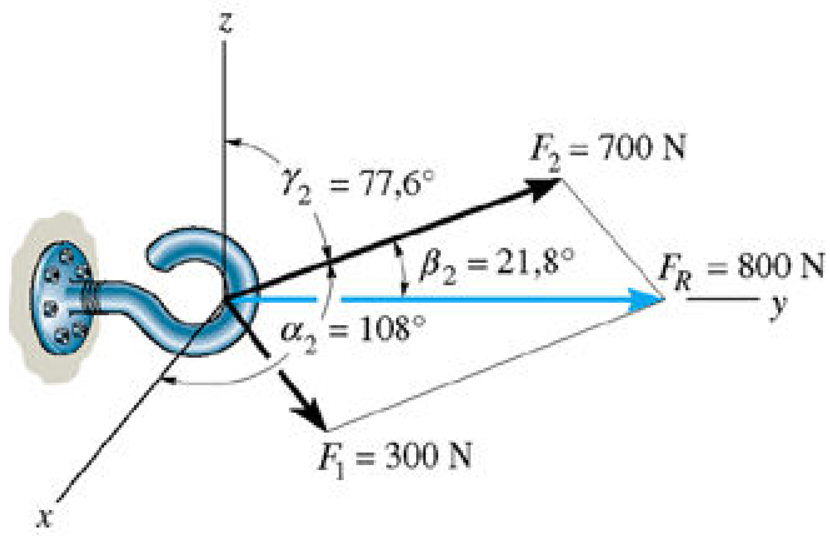
$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{650}{700}\right)$$

$$\beta_2 = 21,8°$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{F_{2z}}{F_2}\right)$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{150}{700}\right)$$

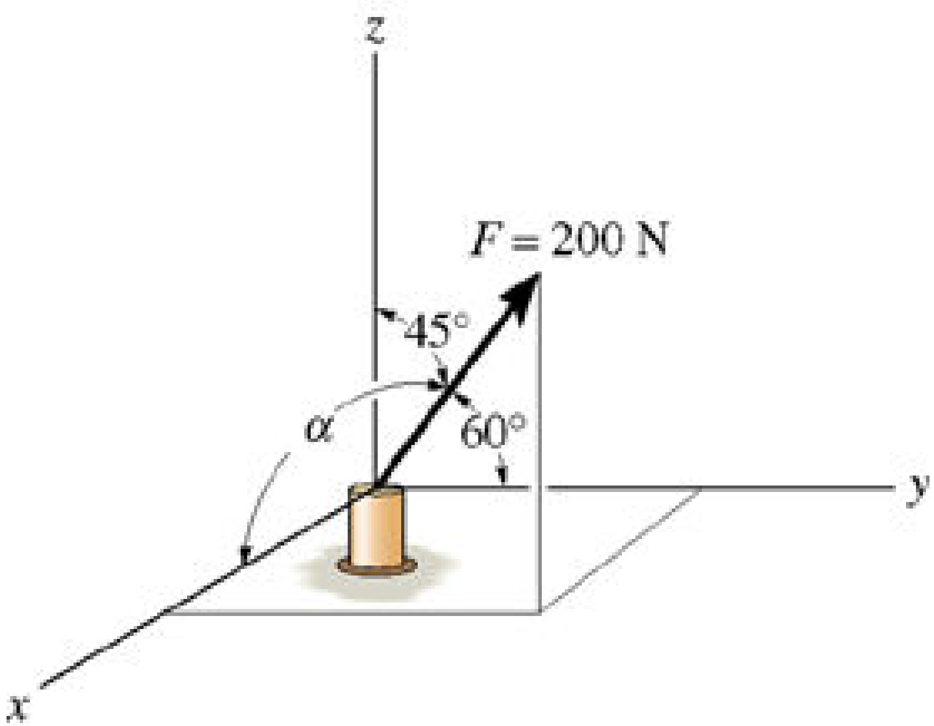
$$\gamma_2 = 77,6°$$



(b)

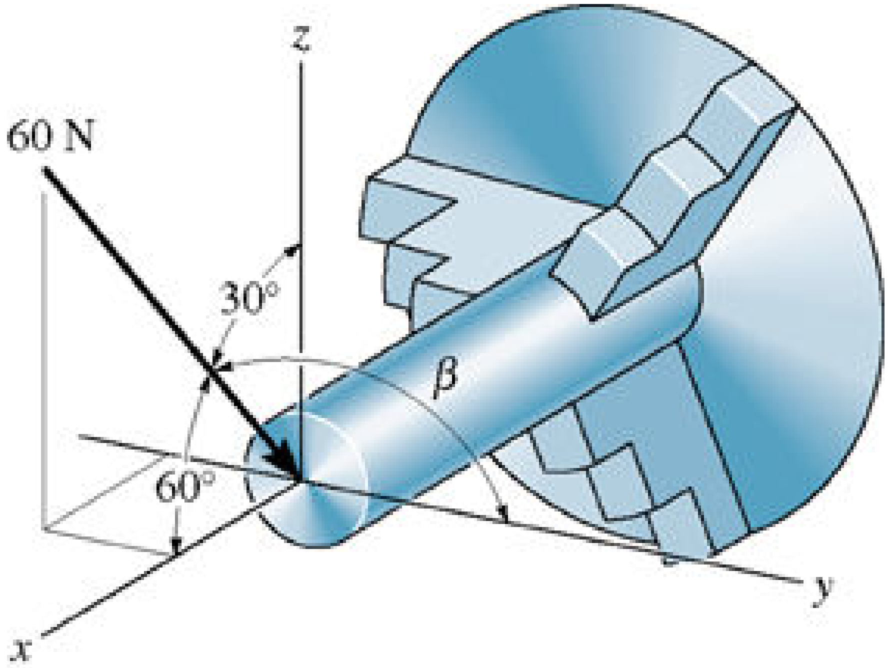
Exercícios Propostos

- 1) Expresse a força *F* como um vetor cartesiano.



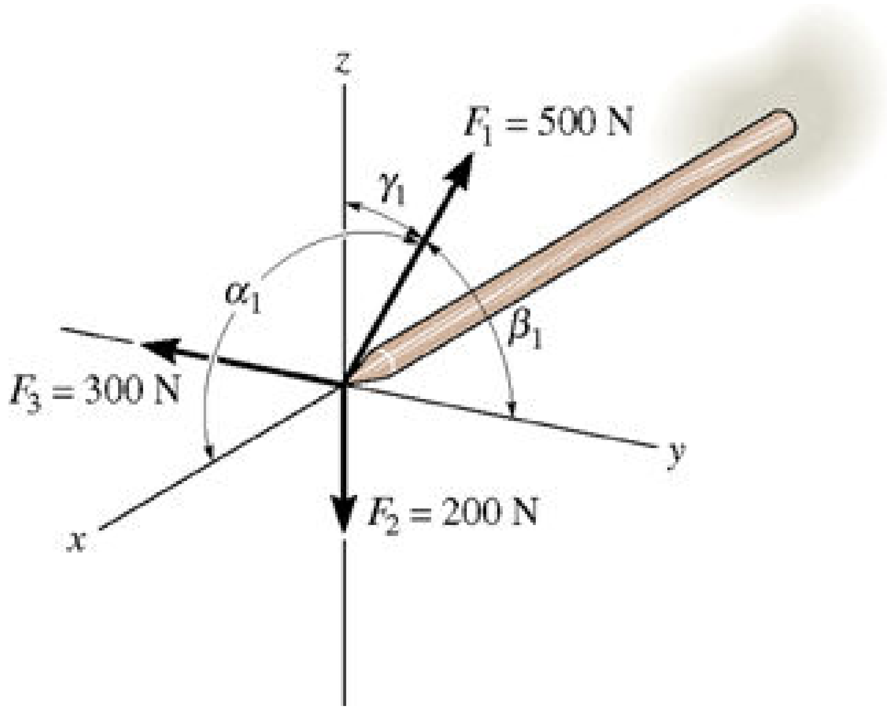
Exercícios Propostos

- 2) A peça montada no torno está sujeita a uma força de 60N. Determine o ângulo de direção β e expresse a força como um vetor cartesiano.



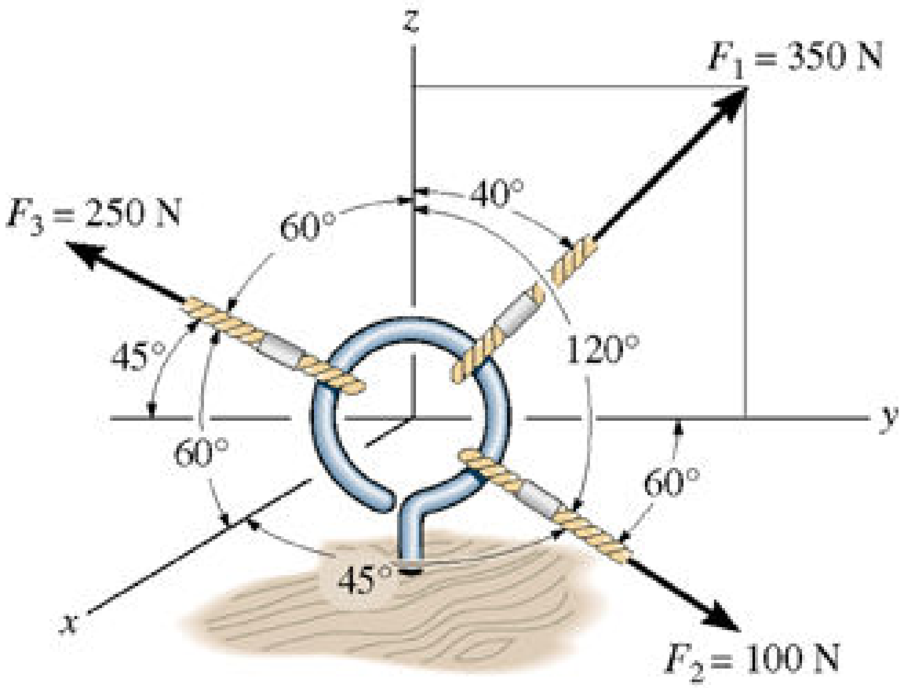
Exercícios Propostos

- 3) O mastro está sujeito as três forças mostradas. Determine os ângulos diretores α_1, β_1, e γ_1 de F_1, de modo que a força resultante que atua sobre o mastro seja $\vec{F}_R = (350\vec{i})$ N



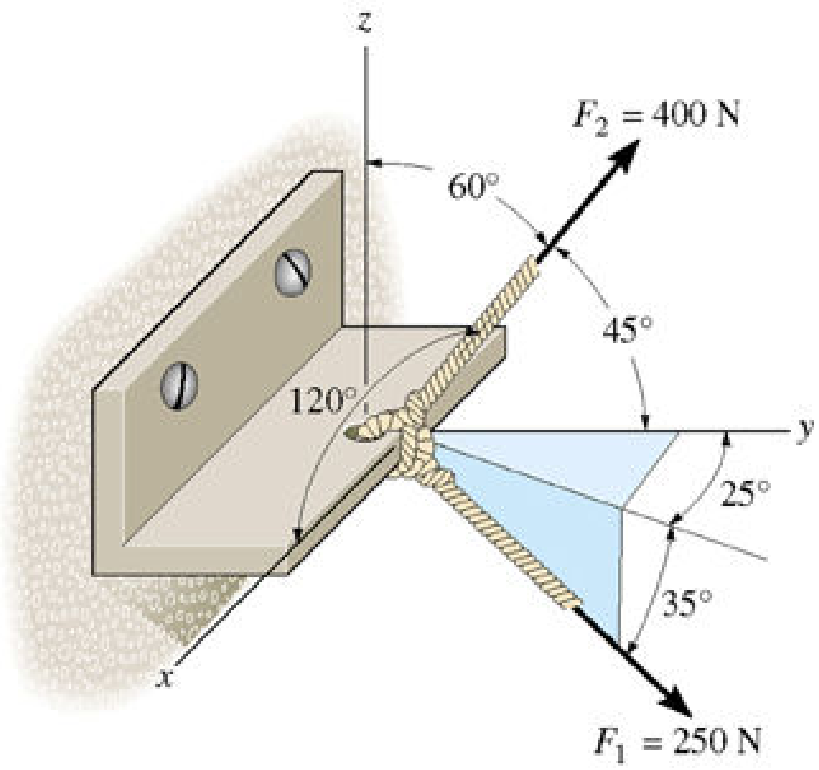
Exercícios Propostos

- 4) Os cabos presos ao olhal estão submetidos as três forças mostradas. Expresse cada força na forma vetorial cartesiana e determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante.



Exercícios Propostos

- 5) O suporte está sujeito as duas forças mostradas. Expresse cada força como um vetor cartesiano e depois determine a força resultante, a intensidade e os ângulos coordenados diretores dessa força.



Próxima Aula

- Vetores Posição.
- Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta.
- Produto Escalar Aplicado na Mecânica.

Mecânica Técnica

Aula 5 – Vetor Posição, Aplicações do Produto Escalar

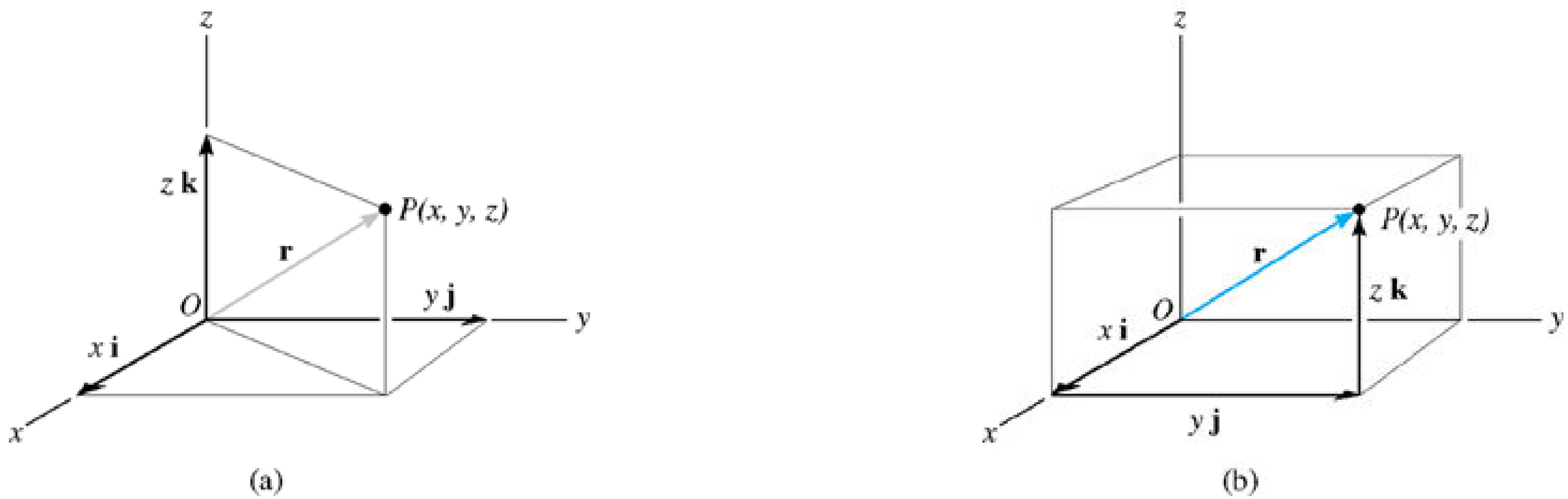
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Vetores Posição.
- Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta.
- Produto Escalar Aplicado na Mecânica.

Vetores Posição

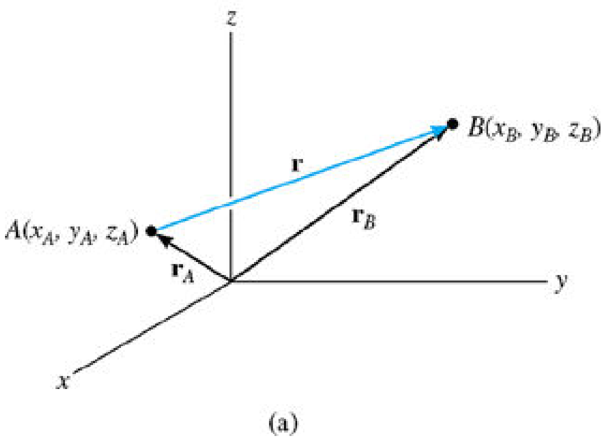
- O vetor posição é definido como um vetor fixo que localiza um ponto do espaço em relação a outro.
- O vetor posição pode ser escrito na forma cartesiana.

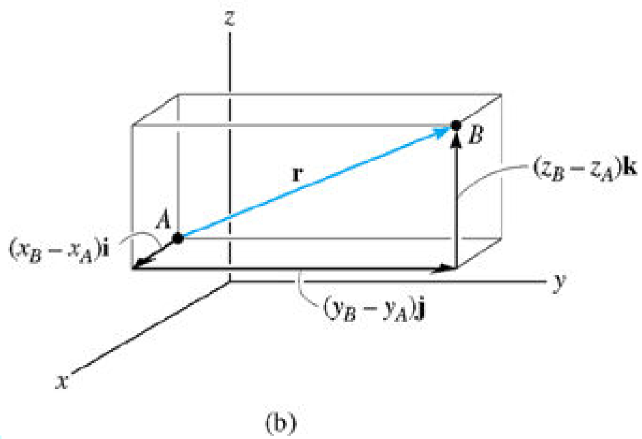


$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Vetor Posição entre Dois Pontos *A* e *B* Fora da Origem

- O vetor posição é calculado a partir da subtração das coordenadas *x*, *y*, *z* das extremidades dos vetores em análise.
- O vetor posição indica o comprimento real ou a distância entre dois pontos no espaço.





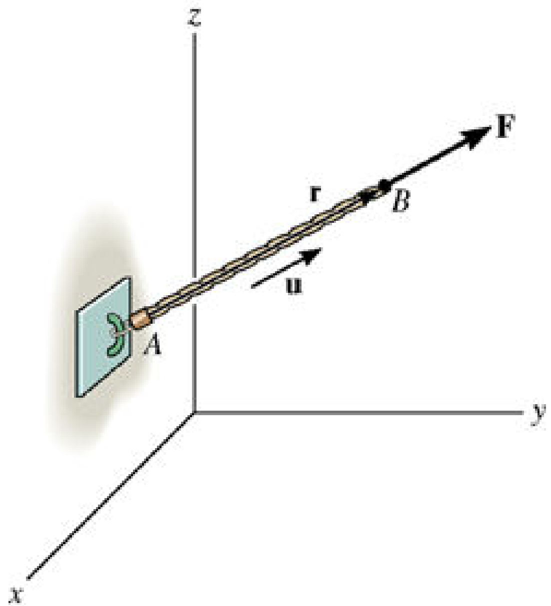
$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Aplicações do Vetor Posição

Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

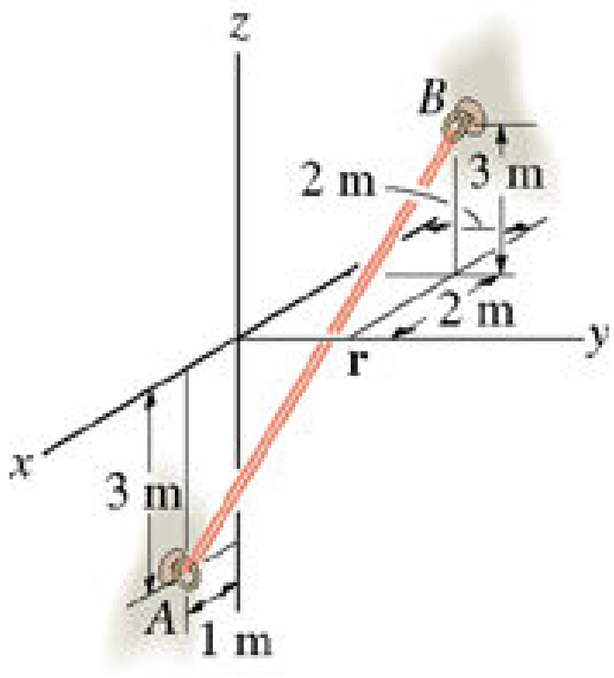
- Pode-se definir uma força como um vetor cartesiano pressupondo que ele tenha a mesma direção e sentido que o vetor posição orientado do ponto *A* para o ponto *B* na corda.



$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = F \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Exercício 1

- 1) a corda mostrada na figura está presa aos pontos *A* e *B*, determine seu comprimento e sua direção, medidos de *A* para *B*.



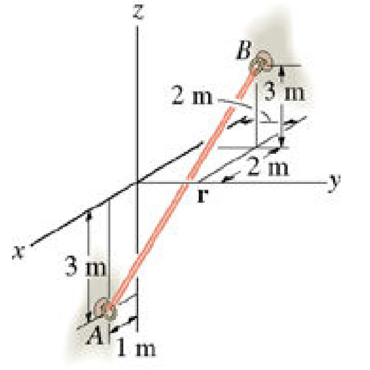
(a)

Solução do Exercício 1

Vetor Posição *AB*:

$A \quad (1,\ 0,\ -3)$ m

$B \quad (-2,\ 2,\ 3)$ m

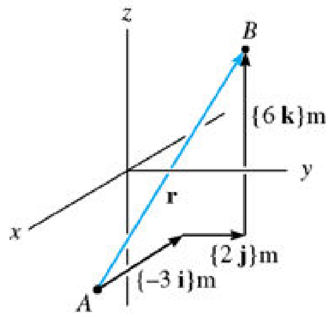


(a)

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = (-2-1)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (3-(-3))\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = (-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k})\ \text{m}$$



(b)

Módulo do Vetor Posição:

$$r_{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}$$

$$r_{AB} = 7\ \text{m}$$

Vetor Unitário *AB*:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0{,}428\vec{i} + 0{,}285\vec{j} + 0{,}857\vec{k}$$

Solução do Exercício 1

Ângulos Diretores:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABx}}{r_{AB}}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-3}{7}\right)$$

$$\alpha = 115°$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABy}}{r_{AB}}\right)$$

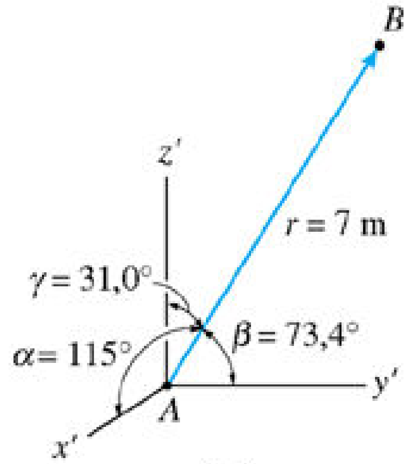
$$\beta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$\beta = 73{,}4°$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{r}_{ABz}}{r_{AB}}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{6}{7}\right)$$

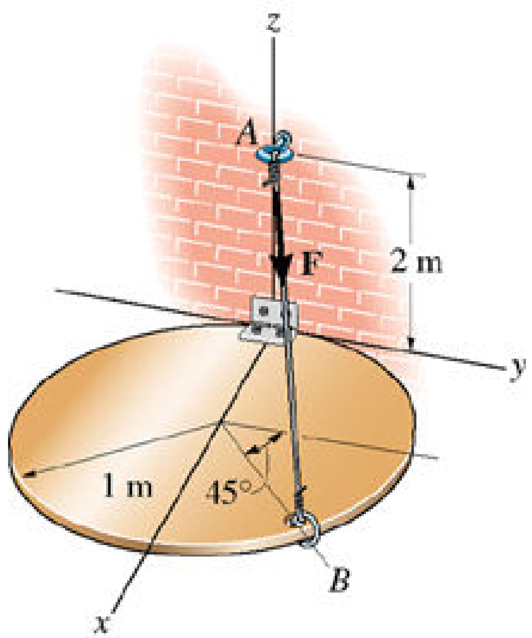
$$\gamma = 31°$$



(c)

Exercício 2

- 2) A placa circular é parcialmente suportada pelo cabo AB. Sabe-se que a força no cabo em A é igual a 500N, expresse essa força como um vetor cartesiano.



(a)

Solução do Exercício 2

Vetor Posição *AB*:

$A \quad (0,\ 0,\ 2)$m

$B \quad 1{,}707;\ 0{,}707;\ 0)$m

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

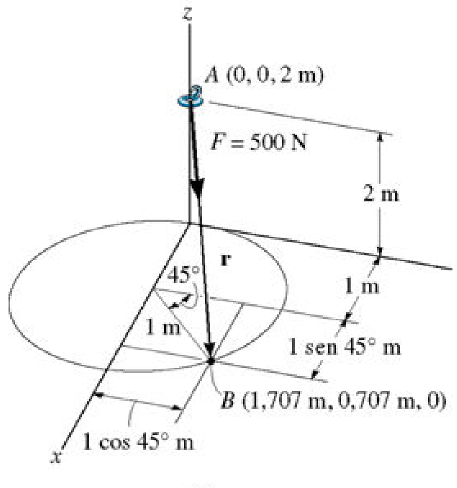
$$\vec{r}_{AB} = (1{,}707 - 0)\vec{i} + (0{,}707 - 0)\vec{j} + (0 - 2)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = (1{,}707\vec{i} + 0{,}707\vec{j} - 2\vec{k})\text{m}$$

Módulo do Vetor Posição:

$$r_{AB} = \sqrt{1{,}707^2 + 0{,}707^2 + 2^2}$$

$$r_{AB} = 2{,}723\text{m}$$



(b)

Vetor Unitário *AB*:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{1{,}707\vec{i} + 0{,}707\vec{j} - 2\vec{k}}{2{,}723}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0{,}626\vec{i} + 0{,}259\vec{j} - 0{,}734\vec{k}$$

Vetor Força:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F} = 500 \cdot (0{,}626\vec{i} + 0{,}259\vec{j} - 0{,}734\vec{k})$$

$$\vec{F} = (31{,}3\vec{i} + 130\vec{j} - 367\vec{k})\text{N}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

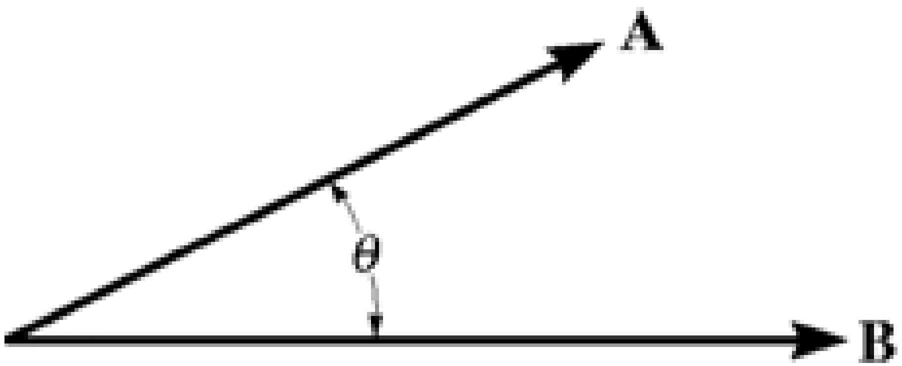
Produto Escalar

- Em determinados problemas de estática é necessário se determinar o ângulo formado entre duas retas ou então os componentes paralelo e perpendicular de uma força em relação a um eixo.
- Principalmente em problemas tridimensionais, a solução por trigonometria torna-se complicada, dessa forma uma maneira rápida de se obter o resultado desejado é a partir da álgebra vetorial.
- O método que pose ser utilizado é o produto escalar entre dois vetores.

Formulação do Produto Escalar

- O produto escalar de dois vetores fornece como resultado um escalar e não um vetor e é definido conforme a equação mostrada a seguir.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta$$



$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1 \qquad \vec{i} \bullet \vec{j} = 0$$

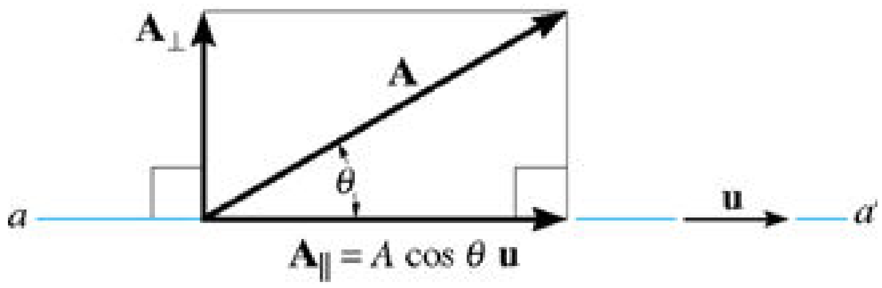
$$\vec{j} \bullet \vec{j} = 1 \qquad \vec{k} \bullet \vec{j} = 0$$

$$\vec{k} \bullet \vec{k} = 1 \qquad \vec{i} \bullet \vec{k} = 0$$

Ângulo entre dois Vetores:

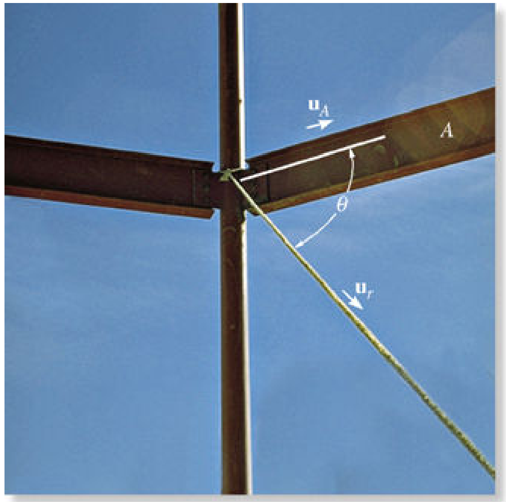
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{A \cdot B}\right)$$

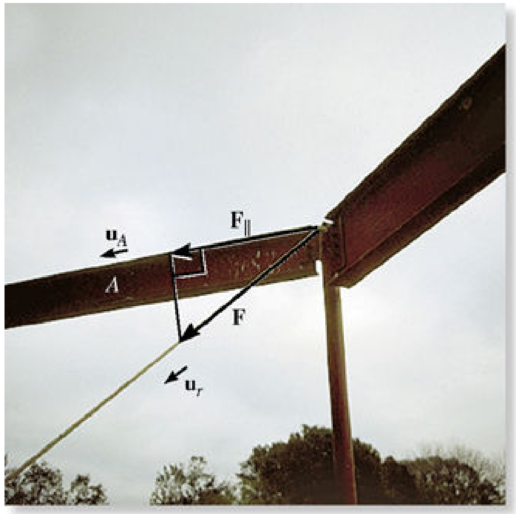
Componentes Paralelo e Perpendicular de um Vetor



$$A_{//} = A\cdot\cos\theta = \vec{A}\bullet\vec{u}$$

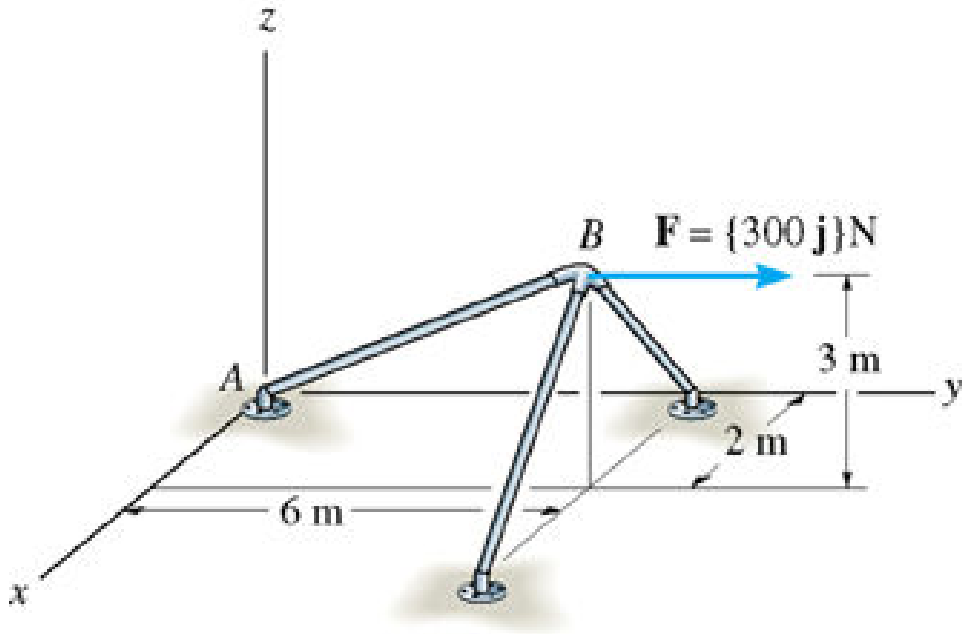
$$A_{\perp} = \sqrt{A^2 - A_{//}^{\ 2}}$$





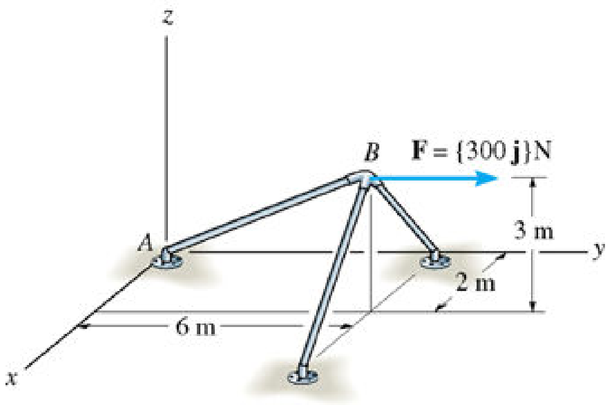
Exercício 3

- 3) A estrutura mostrada na figura está submetida a uma força horizontal. Determine a intensidade dos componentes dessa força paralela e perpendicular ao elemento *AB*.

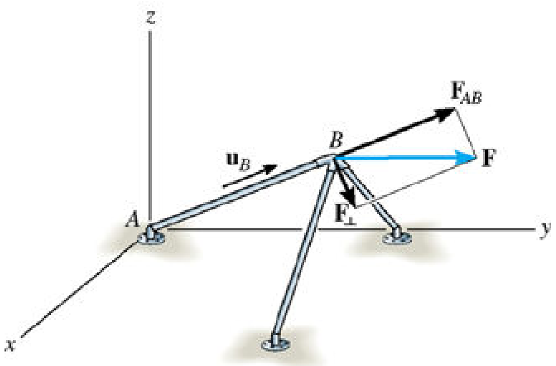


(a)

Solução do Exercício 3



(a)



(b)

Força Paralela a Barra *AB*:

$$F_{//AB} = F \cdot \cos\theta = \vec{F} \bullet \vec{u}_{AB}$$

Cálculo do Vetor Unitário *AB*:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

Vetor Posição *AB*:

$$\vec{r}_{AB} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{m}$$

Módulo do Posição *AB*:

$$r_{AB} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}$$

$$r_{AB} = 7 \text{ m}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Solução do Exercício 3

Cálculo do Vetor Unitário *AB*:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0{,}286\vec{i} + 0{,}857\vec{j} + 0{,}429\vec{k}$$

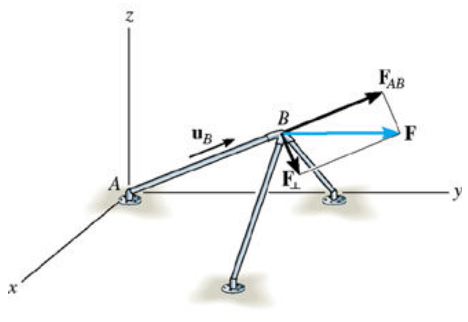
Força Paralela a Barra *AB*:

$$F_{//AB} = F \cdot \cos\theta = \vec{F} \bullet \vec{u}_{AB}$$

$$F_{//AB} = (300\vec{j}) \bullet (0{,}286\vec{i} + 0{,}857\vec{j} + 0{,}429\vec{k})$$

$$F_{//AB} = (0 \cdot 0{,}286) + (300 \cdot 0{,}857) + (0 \cdot 0{,}429)$$

$$F_{//AB} = 257{,}1\text{N}$$



(b)

Vetor Força Paralela a Barra *AB*:

$$\vec{F}_{//AB} = F_{//AB} \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F}_{//AB} = 257{,}1 \cdot (0{,}286\vec{i} + 0{,}857\vec{j} + 0{,}429\vec{k})$$

$$\vec{F}_{//AB} = (73{,}5\vec{i} + 220\vec{j} + 110\vec{k})\text{N}$$

Força Perpendicular a Barra *AB*:

$$\vec{F}_{\perp AB} = \vec{F} - \vec{F}_{//AB}$$

$$\vec{F}_{\perp AB} = (300\vec{j}) - (73{,}5\vec{i} + 220\vec{j} + 110\vec{k})$$

$$\vec{F}_{\perp AB} = (-73{,}5\vec{i} + 80\vec{j} - 110\vec{k})\text{N}$$

Em Módulo:

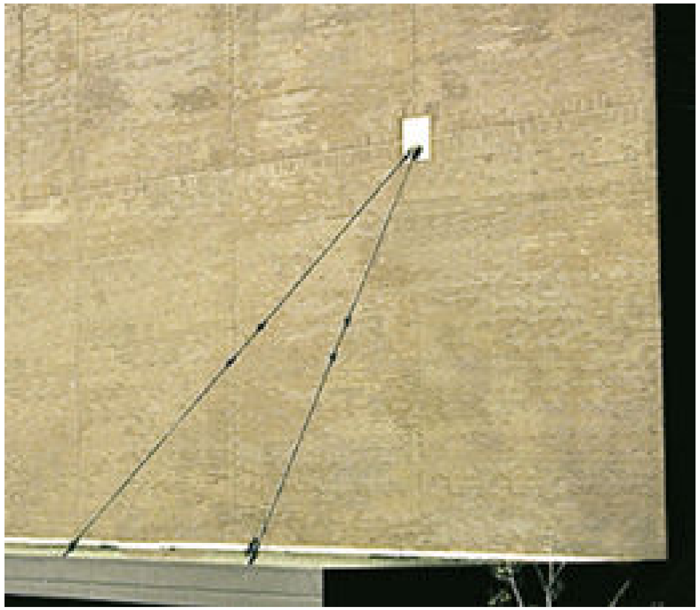
$$F_{\perp AB} = \sqrt{F^2 + F_{//AB}^{\;2}}$$

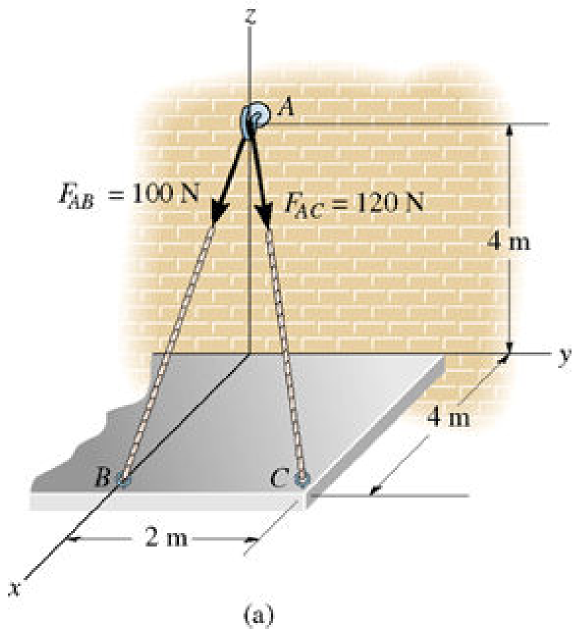
$$F_{\perp AB} = \sqrt{300^2 + 257{,}1^2}$$

$$F_{\perp AB} = 155\ \text{N}$$

Exercícios Propostos

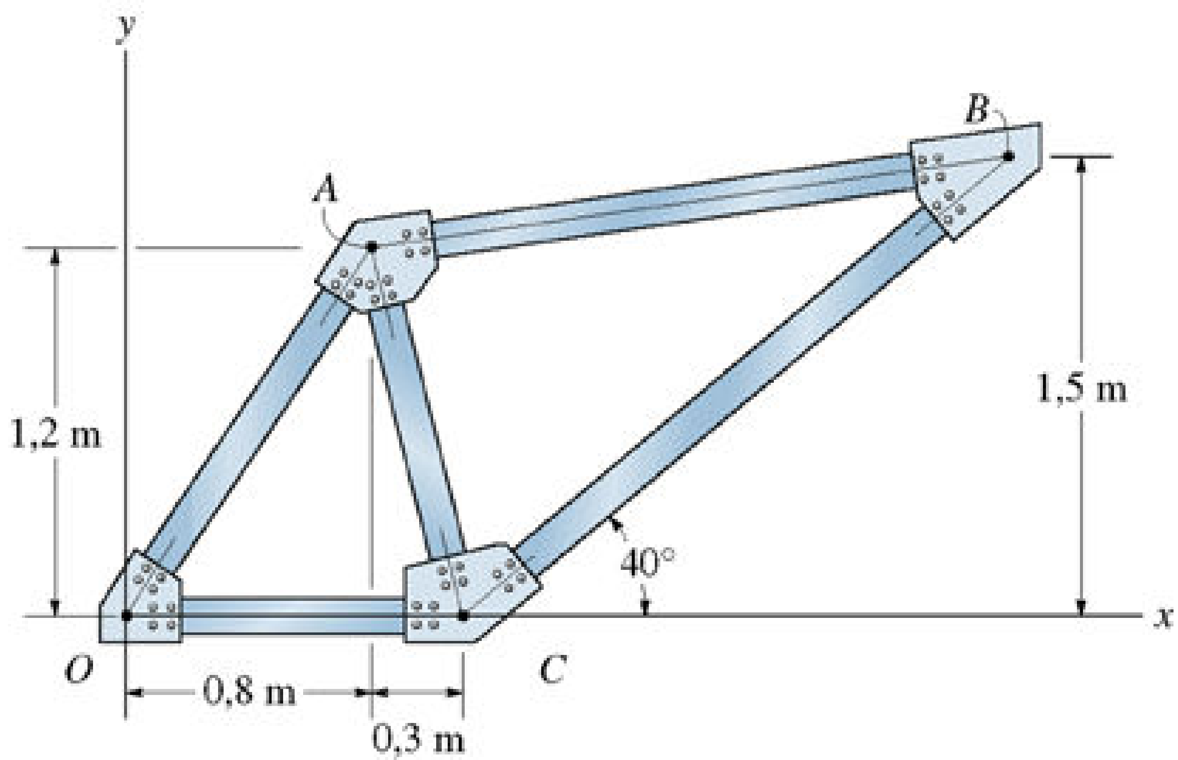
- 1) A cobertura é suportada por cabos como mostrado. Determine a intensidade da força resultante que atua em *A*.





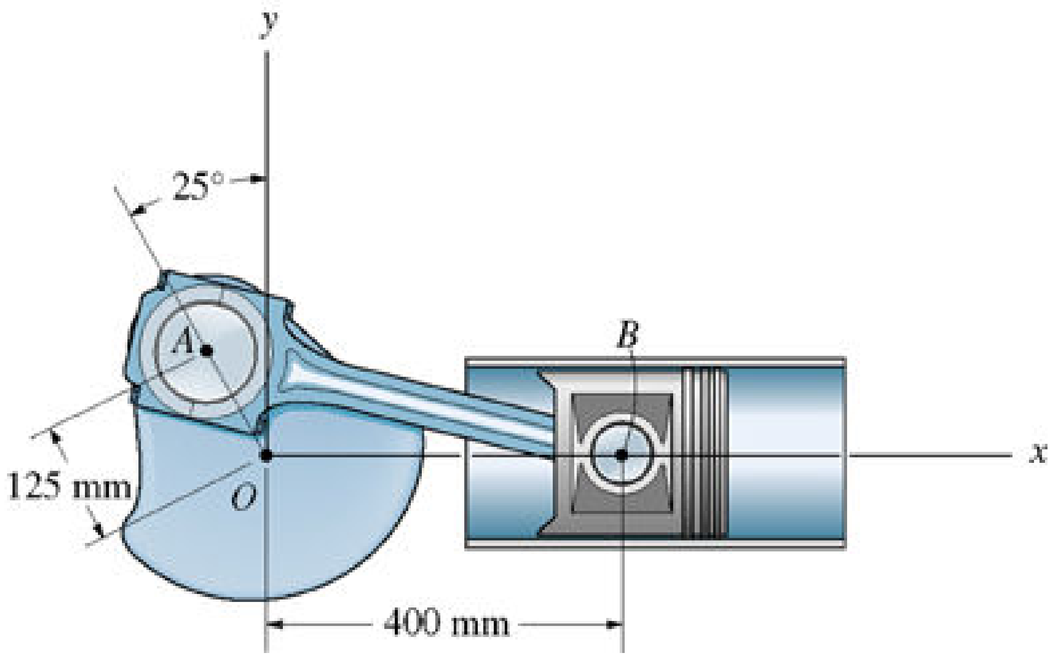
Exercícios Propostos

- 2) Determine o comprimento do elemento *AB* da treliça.



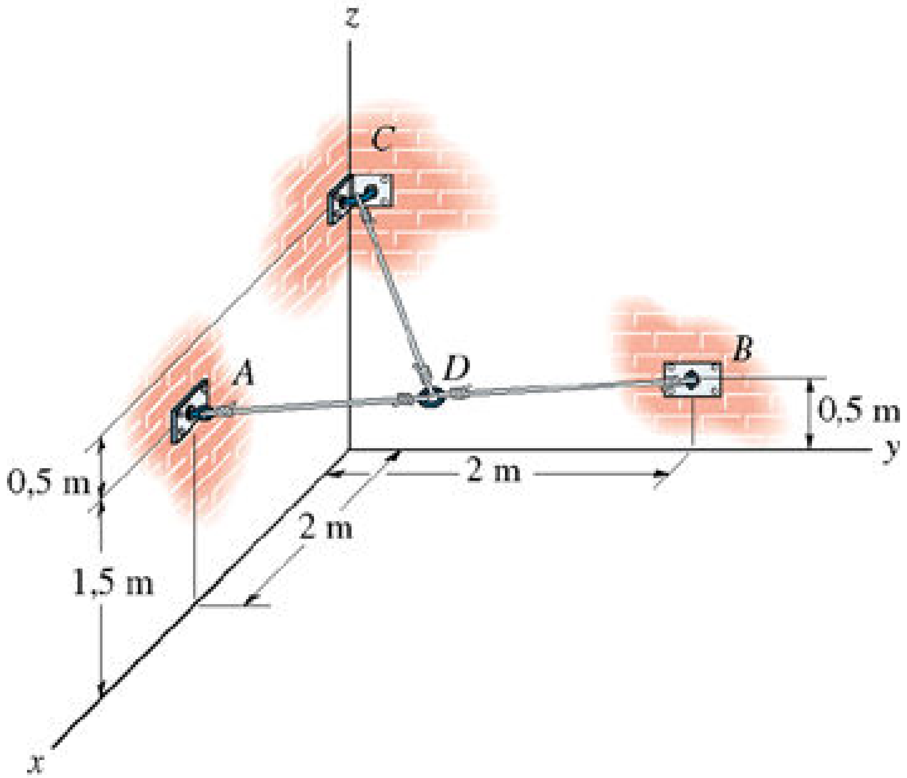
Exercícios Propostos

- 3) Determine o comprimento do elemento *AB* da biela do motor mostrado.



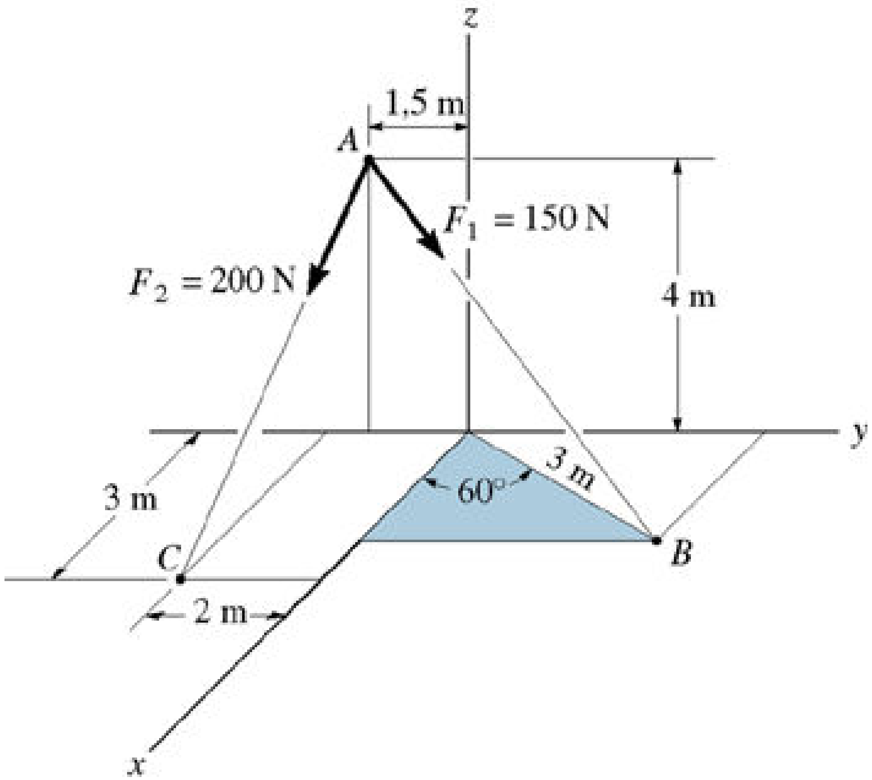
Exercícios Propostos

- 4) Determine os comprimentos dos arames *AD*, *BD* e *CD*. O anel *D* está no centro entre *A* e *B*.



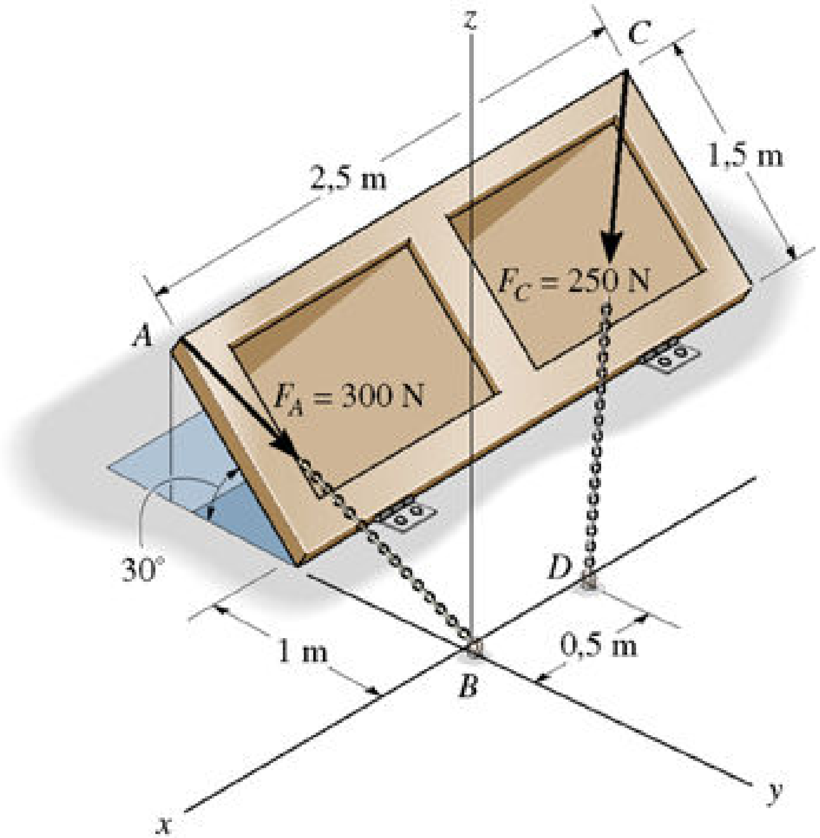
Exercícios Propostos

- 5) Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante que atua sobre o ponto *A*.



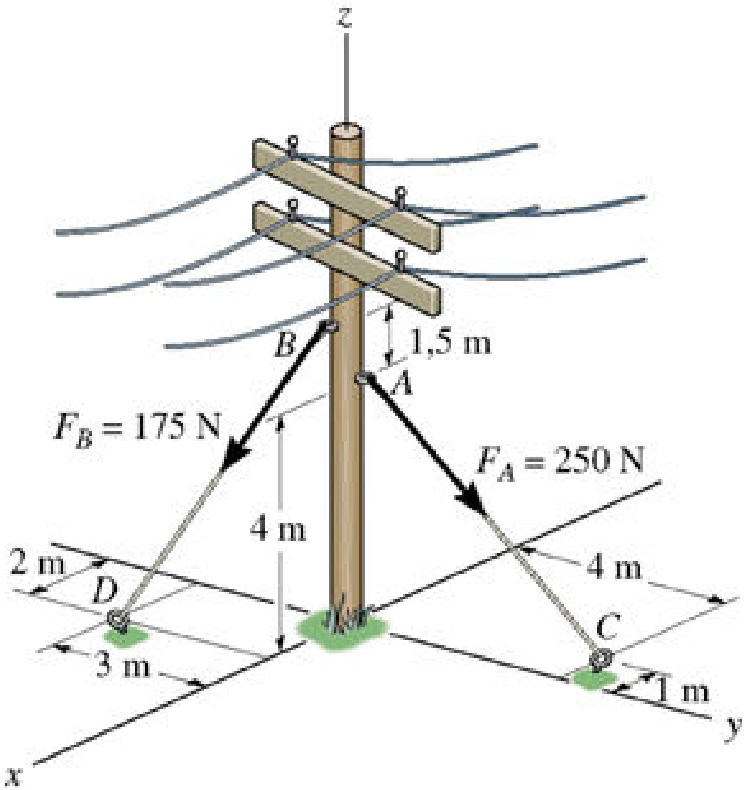
Exercícios Propostos

- 6) A porta é mantida aberta por meio de duas correntes. Se a tensão em *AB* e *CD* for F_{AB} = 300N e F_{CD} = 250N, expresse cada uma dessas forças como um vetor cartesiano.



Exercícios Propostos

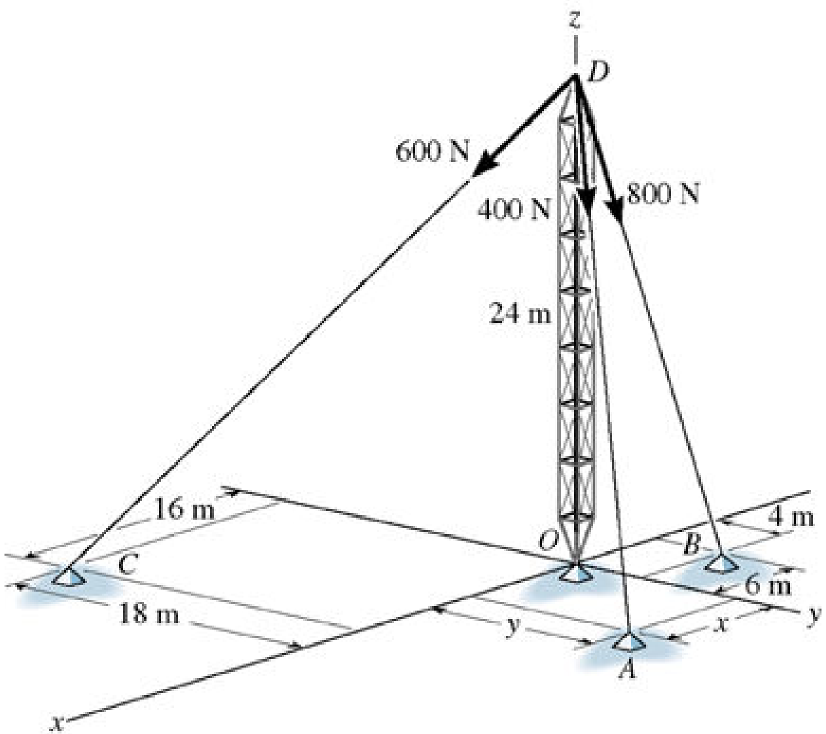
- 7) Os cabos de tração são usados para suportar o poste de telefone. Represente a força em cada cabo como um vetor cartesiano.



Exercícios Propostos

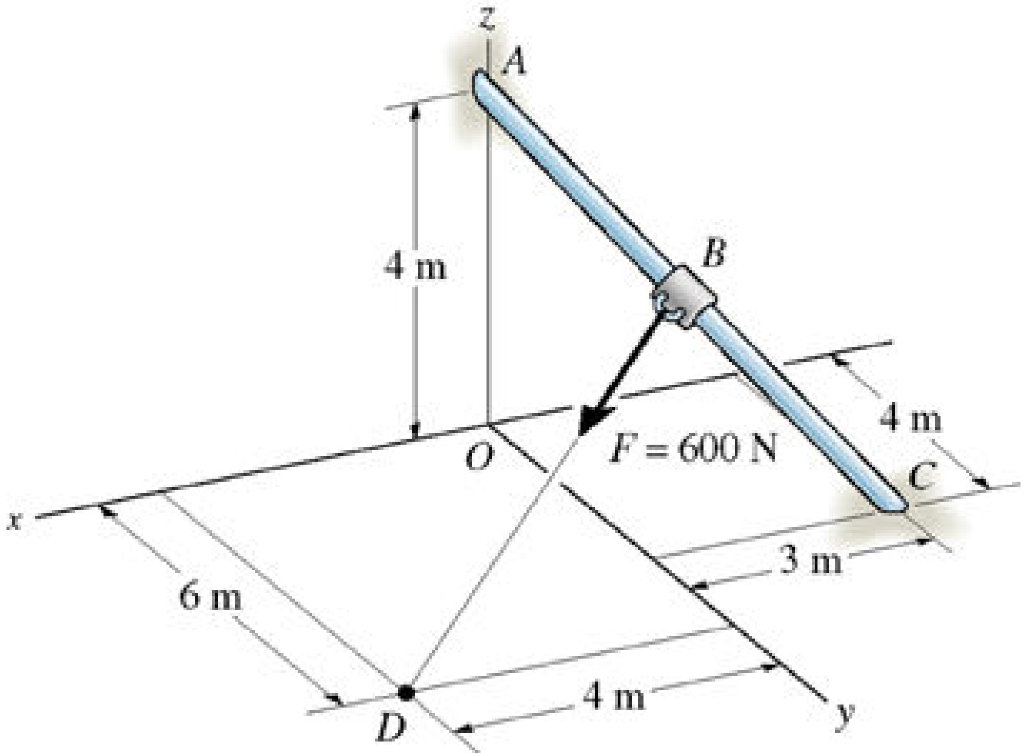
- 8) A torre é mantida reta pelos três cabos. Se a força em cada cabo que atua sobre a torre for aquela mostrada na figura, determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante.

  Considere x = 20m e y = 15m.



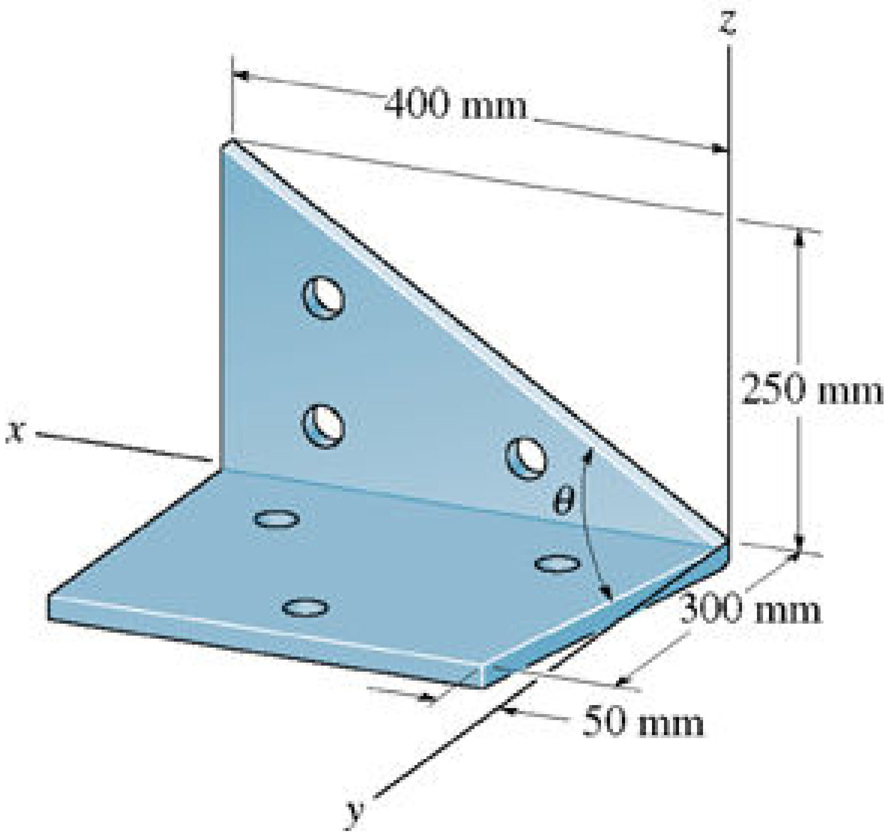
Exercícios Propostos

- 9) Determine os componentes de *F* paralelo e perpendicular a barra *AC*. O ponto *B* está no ponto médio de *AC*.



Exercícios Propostos

- 10) Determine o ângulo θ mostrado na figura a seguir.



Próxima Aula

- Equilíbrio do Ponto Material.
- Diagrama de Corpo Livre.
- Equações de Equilíbrio.
- Equilíbrio de Sistemas Bidimensionais.

Mecânica Técnica

Aula 6 – Equilíbrio do Ponto Material em Duas Dimensões

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Equilíbrio do Ponto Material.
- Diagrama de Corpo Livre.
- Equações de Equilíbrio.
- Equilíbrio de Sistemas Bidimensionais.

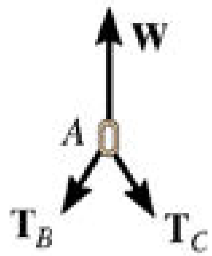
Condição de Equilíbrio do Ponto Material

- Um ponto material encontra-se em equilíbrio estático desde que esteja em repouso ou então possua velocidade constante.
- Para que essa condição ocorra, a soma de todas as forças que atuam sobre o ponto material deve ser nula, portanto:

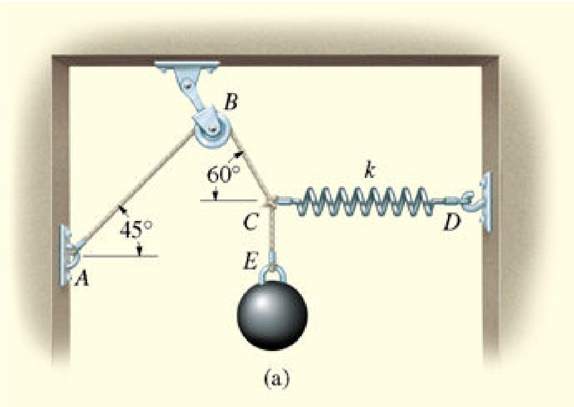
$$\sum F = 0$$

Diagrama de Corpo Livre

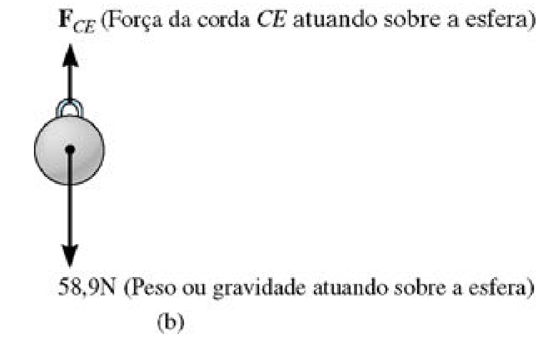
- O diagrama de corpo livre representa um esboço do ponto material que mostra todas as forças que atuam sobre ele.

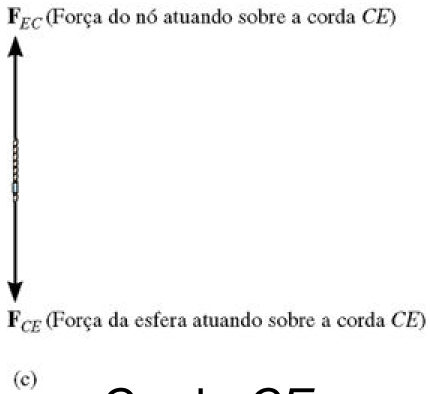


Exemplo de Diagrama de Corpo Livre

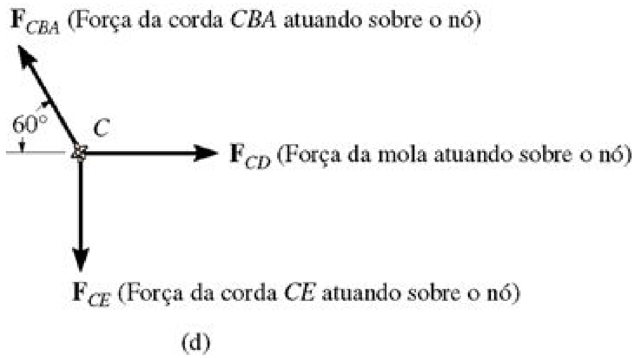


Esfera





Corda *CE*

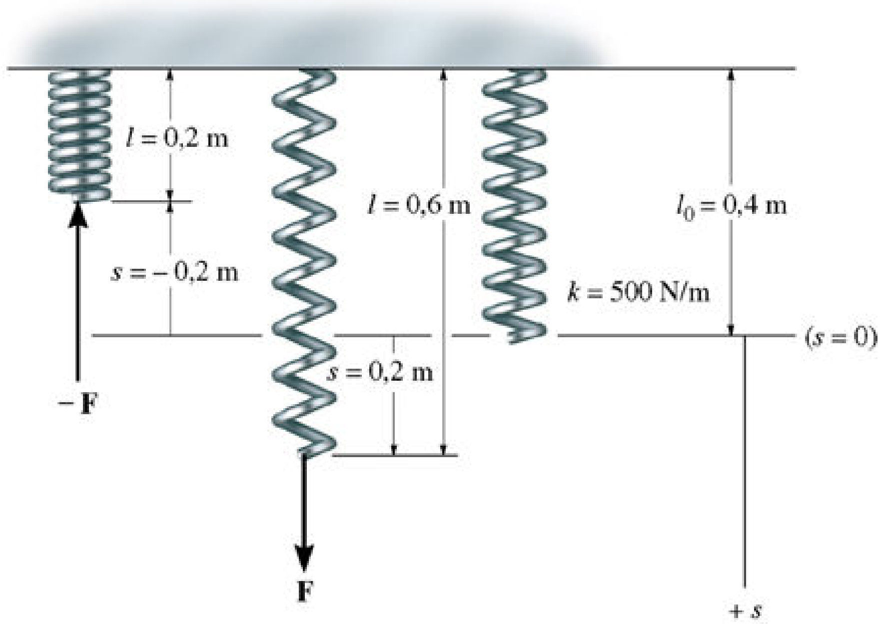


Nó *C*

Molas

- Quando se utilizar uma mola elástica, o comprimento da mola variará em proporção direta com a força que atua sobre ela.
- A equação da força atuante na mola é apresentada a seguir.

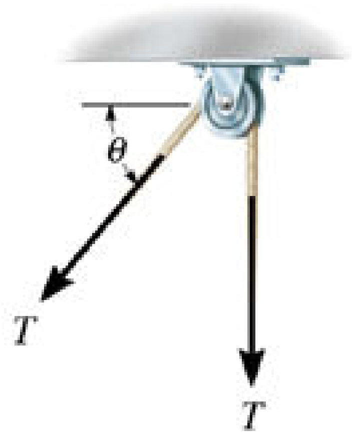
$$F = k \cdot s$$



- *K* = Constante elástica da mola.
- *S* = Deformação da mola.

Cabos e Polias

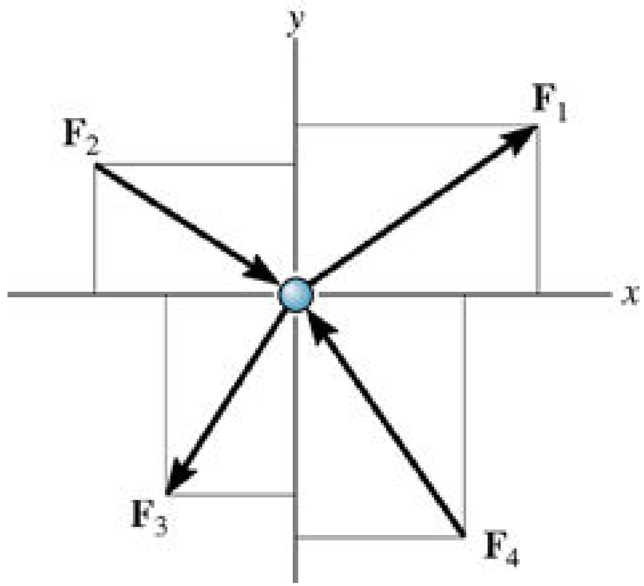
- Cabos suportam apenas uma força de tração que atuam na direção do mesmo.



O cabo está em tensão

Equações de Equilíbrio

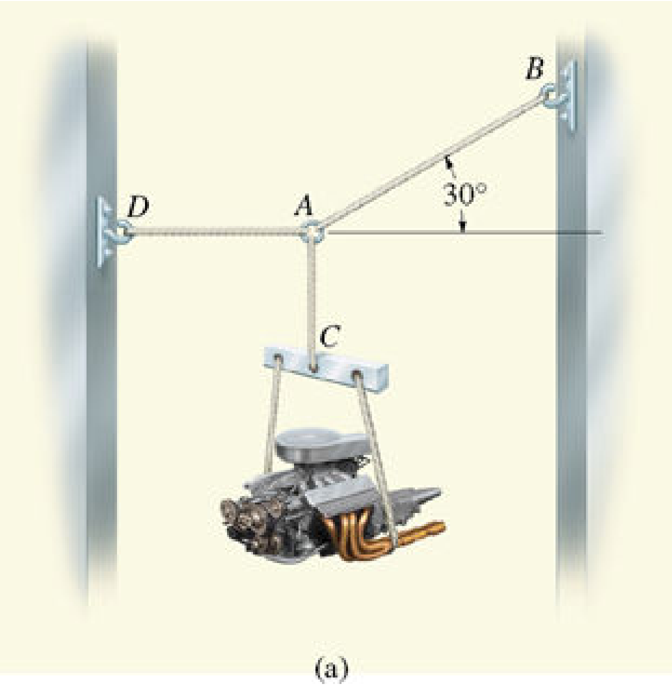
- Se um ponto material estiver submetido a um sistema de vária forças coplanares e colineares, cada força poderá ser decomposta em componentes x e y e para a condição de equilíbrio é necessário que as seguintes condições sejam atendidas.



$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

Exercício 1

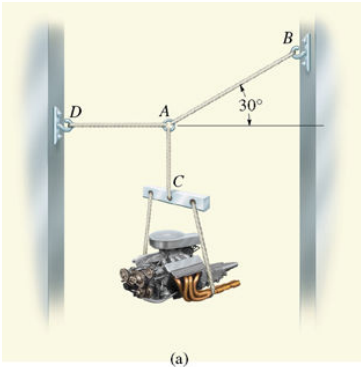
- 1) Determine a tensão nos cabos *AB* e *AD* para o equilíbrio do motor de 250kg mostrado na figura.



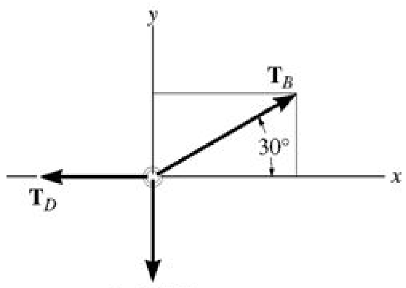
(a)

Solução do Exercício 1

- Diagrama de corpo livre:



(a)



(b)

- Peso do motor:

$$P = m \cdot g \Rightarrow P = 250 \cdot 9{,}81$$

$$P = 2452\text{N}$$

- Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_B \cdot \cos 30^\circ - T_D = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_B \cdot sen 30^\circ - P = 0 \quad \text{(II)}$$

- Resolvendo a equação II:

$$T_B \cdot sen 30^\circ - 2452 = 0 \Rightarrow T_B = \frac{2452}{sen 30^\circ}$$

$$T_B = 4904\text{N}$$

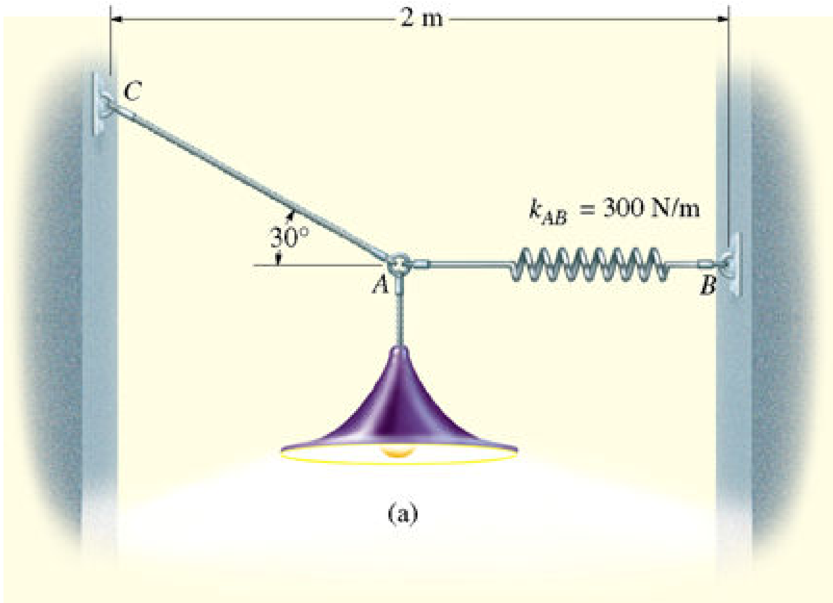
- Substituindo em I:

$$4904 \cdot \cos 30^\circ - T_D = 0 \Rightarrow T_D = 4904 \cdot \cos 30^\circ$$

$$T_D = 4247\text{N}$$

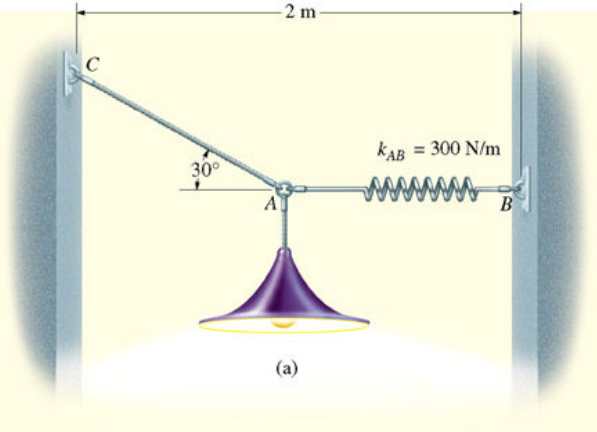
Exercício 2

- 2) Determine o comprimento da corda *AC* da figura, de modo que a luminária de 8kg seja suspensa na posição mostrada. O comprimento não deformado da mola é l'_{AB} = 0,4m e a mola tem rigidez k_{AB} = 300N/m.

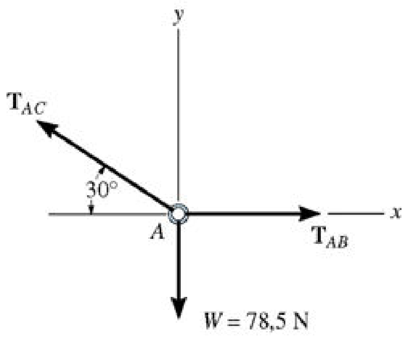


Solução do Exercício 2

- Diagrama de corpo livre:



(a)



(b)

- Peso da luminária:

$P = m \cdot g \Rightarrow P = 8 \cdot 9{,}81$

$P = 78{,}5$ N

- Equações de equilíbrio:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AB} - T_{Ac} \cdot \cos 30^\circ = 0$ (I)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AC} \cdot sen30^\circ - P = 0$ (II)

- Resolvendo a equação II:

$T_{AC} \cdot sen30^\circ - 78{,}5 = 0 \Rightarrow T_{AC} = \dfrac{78{,}5}{sen30^\circ}$

$T_{AC} = 157$ N

- Substituindo em I:

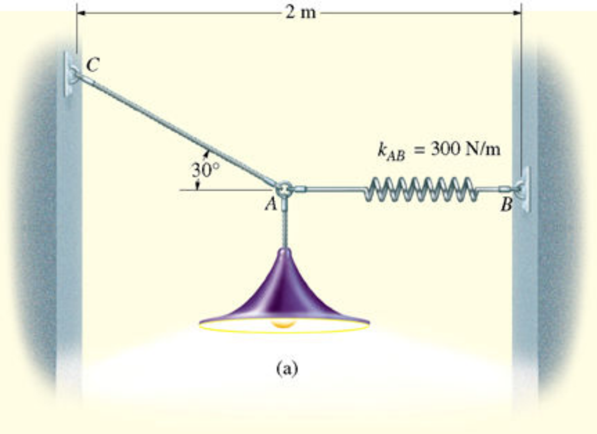
$T_{AB} - 157 \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow T_{AB} = 157 \cdot \cos 30^\circ$

$T_{AB} = 136$ N

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Solução do Exercício 2

- Alongamento da mola:



$$T_{AB} = k_{AB} \cdot s_{AB}$$

$$136 = 300 \cdot s_{AB}$$

$$s_{AB} = \frac{136}{300}$$

$$s_{AB} = 0{,}453 \text{ m}$$

- Comprimento deformado da mola:

$$l_{AB} = l'_{AB} + s_{AB}$$

$$l_{AB} = 0{,}4 + 0{,}453$$

$$l_{AB} = 0{,}853 \text{ m}$$

- Comprimento do cabo *AC*:

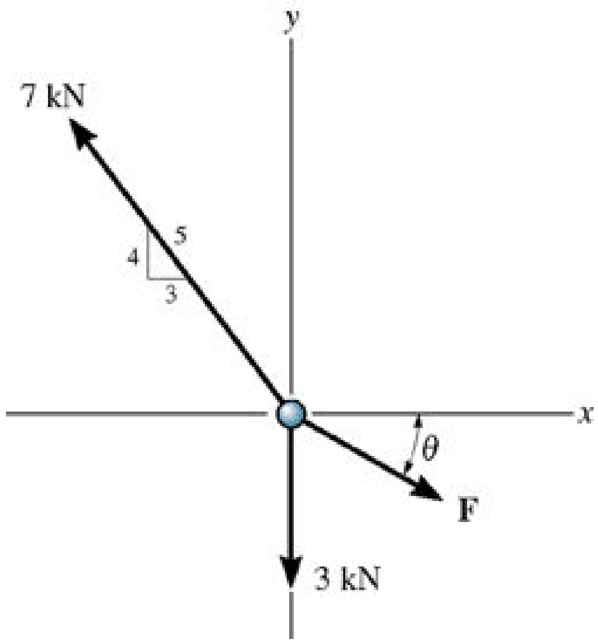
$$2 = l_{AC} \cdot \cos 30^\circ + l_{AB} \Rightarrow 2 = l_{AC} \cdot \cos 30^\circ + 0{,}853$$

$$l_{AC} = \frac{2 - 0{,}853}{\cos 30^\circ}$$

$$l_{AC} = 1{,}32 \text{ m}$$

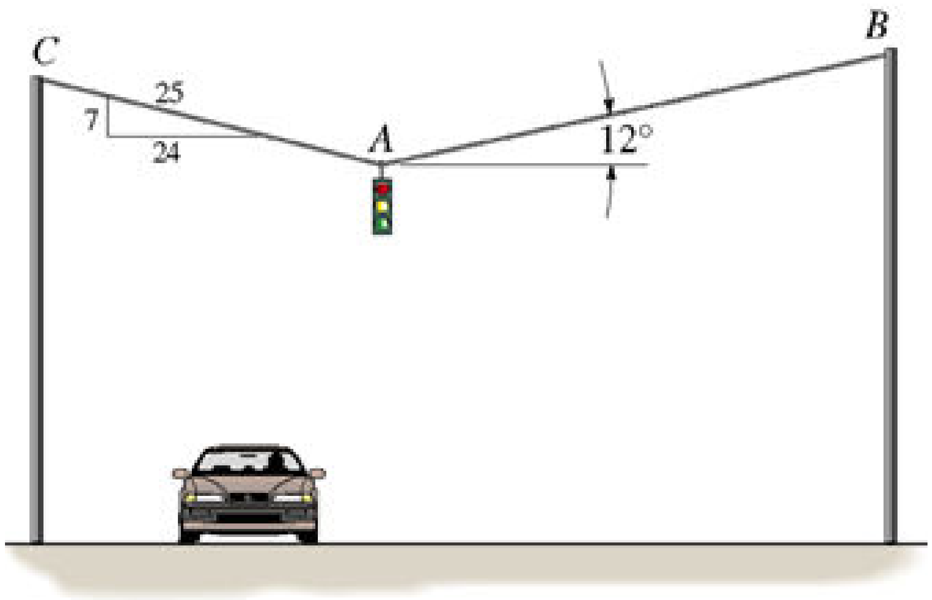
Exercícios Propostos

- 1) Determine o ângulo θ e a intensidade de ***F*** de modo que o ponto material esteja em equilíbrio estático.



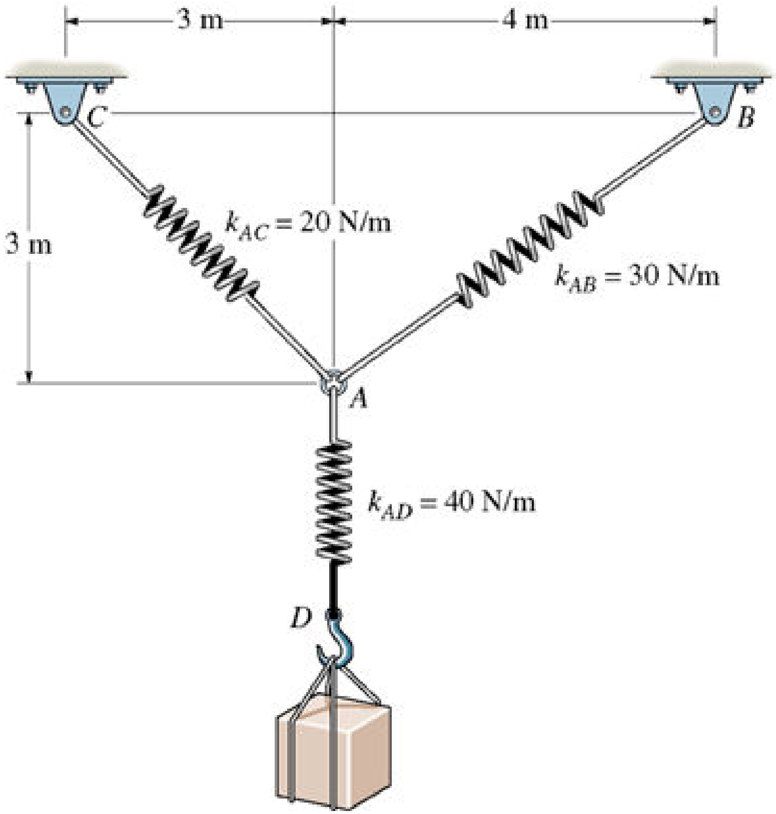
Exercícios Propostos

- 2) Determine a força necessária nos cabos *AB* e *AC* para suportar o semáforo de 12kg.



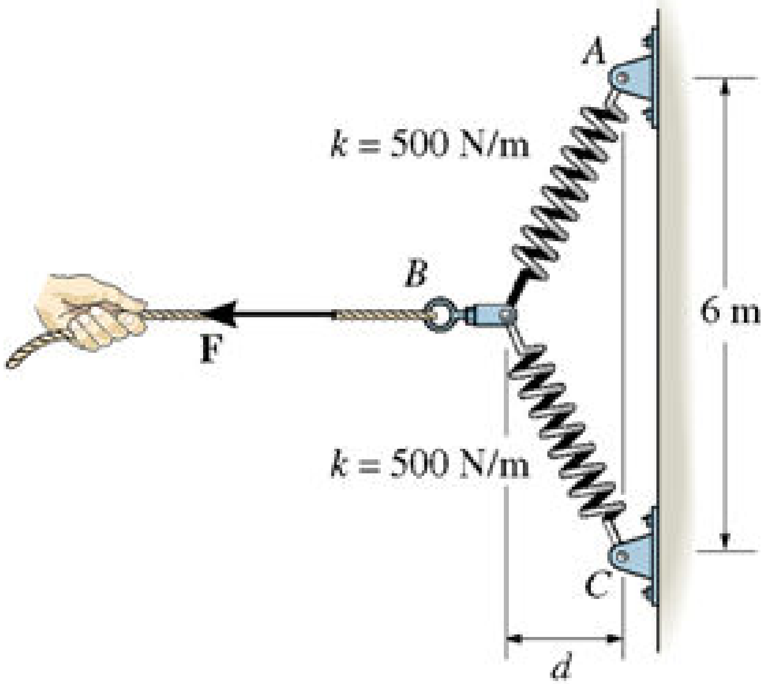
Exercícios Propostos

- 3) Determine a deformação que cada mola deve ter para equilibrar o bloco de 2kg. As molas encontram-se em posição de equilíbrio.



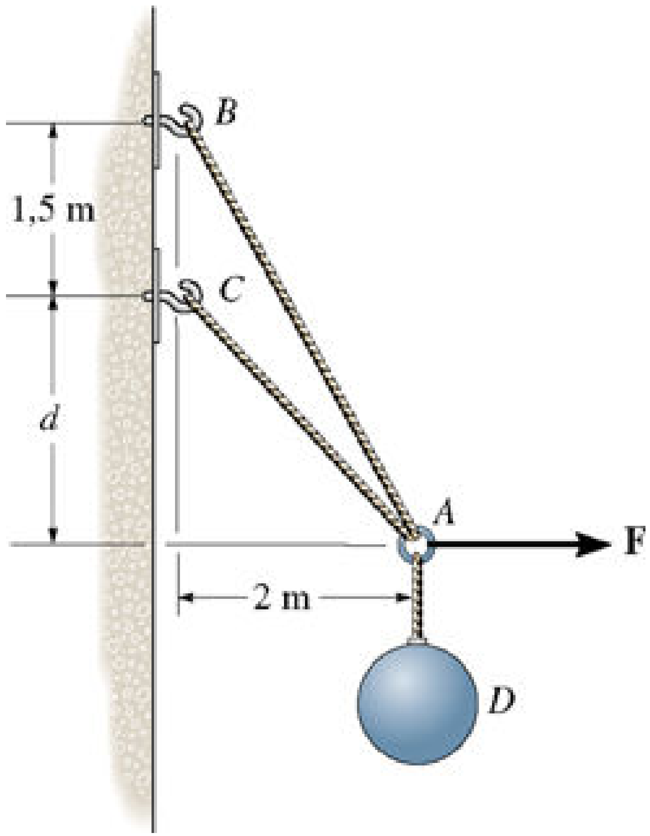
Exercícios Propostos

- 4) A mola *ABC* da figura tem rigidez de 500N/m e comprimento sem deformação de 6m. Determine a força horizontal **F** aplicada a corda que está presa ao anel *B* de modo que o deslocamento do anel em relação a parede seja d=1,5m.



Exercícios Propostos

- 5) Determine as forças necessárias nos cabos *AB* e *AC* da figura para manter a esfera D de 20kg em equilíbrio. Dados: F = 300N e d = 1m.



Próxima Aula

- Equilíbrio do Ponto Material de Sistemas Tridimensionais.
- Diagrama de Corpo Livre de Sistemas Tridimensionais.
- Equações de Equilíbrio de Sistemas Tridimensionais.

Mecânica Técnica

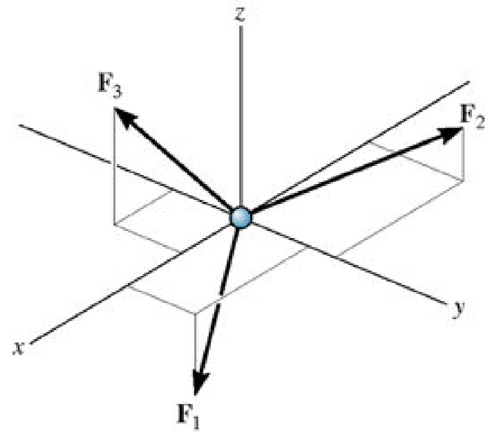
Aula 7 – Equilíbrio do Ponto Material em Três Dimensões

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Equilíbrio do Ponto Material de Sistemas Tridimensionais.
- Diagrama de Corpo Livre de Sistemas Tridimensionais.
- Equações de Equilíbrio de Sistemas Tridimensionais.

Formulação Matemática para o Equilíbrio em Três Dimensões

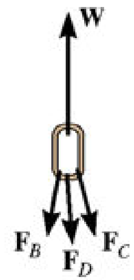


Para o Equilíbrio é necessário que:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k} = 0$$

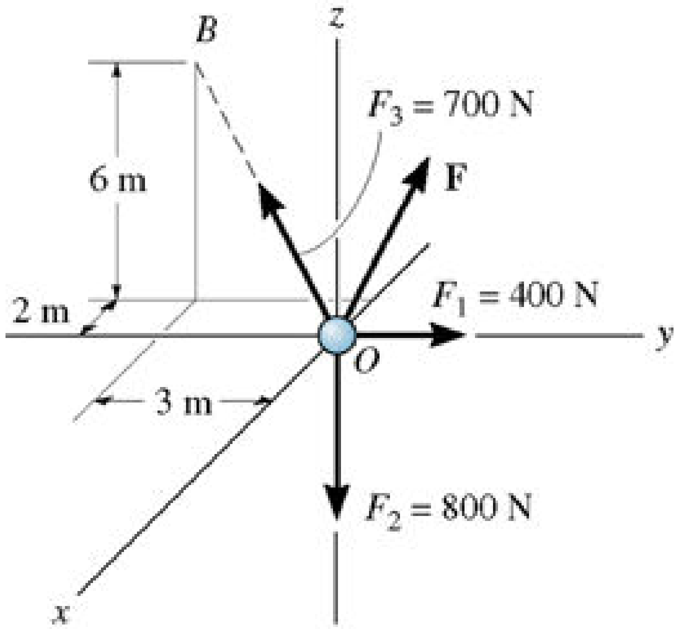
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$



A solução é obtida por um sistema de três equações e três incógnitas

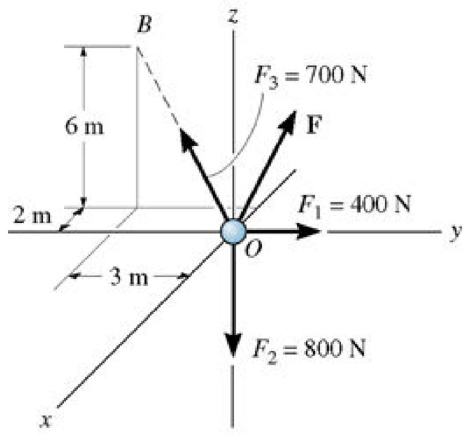
Exercício 1

- 1) Determine a intensidade e os ângulos diretores da força *F* necessários para o equilíbrio do ponto *O*.



(a)

Solução do Exercício 1



(a)

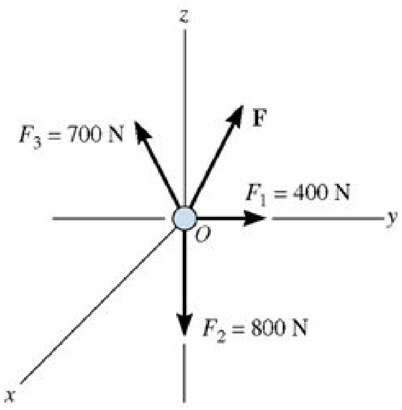
Determinação das forças:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \text{ N}$$

$$\vec{F}_1 = (400\vec{j})\text{N}$$

$$\vec{F}_2 = (-800\vec{k})\text{N}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_{OB}$$



(b)

Vetor unitário e Vetor posição:

$$\vec{u}_{OB} = \frac{\vec{r}_{OB}}{r_{OB}}$$

$$\vec{r}_{OB} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}\text{ m}$$

$$r_{OB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$r_{OB} = 7\text{m}$$

$$\vec{u}_{OB} = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{OB} = -0{,}286\vec{i} - 0{,}429\vec{j} + 0{,}857\vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_{OB}$$

$$\vec{F}_3 = 700 \cdot (-0{,}286\vec{i} - 0{,}429\vec{j} + 0{,}857\vec{k})$$

$$\vec{F}_3 = (-200\vec{i} - 300\vec{j} + 600\vec{k})\text{N}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Solução do Exercício 1

Condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F} = 0$$

$$400\vec{j} - 800\vec{k} - 200\vec{i} - 300\vec{j} + 600\vec{k} + F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = 0$$

Sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -200 + F_x = 0 \rightarrow F_x = 200\text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 400 - 300 + F_y = 0 \rightarrow F_y = -100\text{N}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -800 + 600 + F_z = 0 \rightarrow F_z = 200\text{N}$$

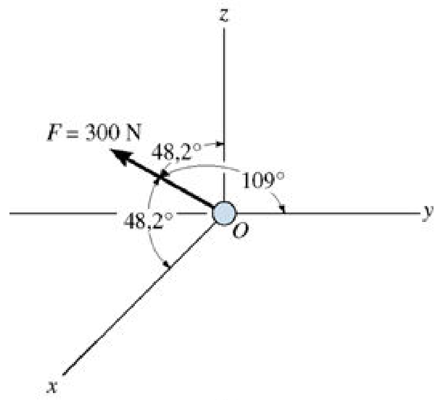
Vetor força ***F***:

$$F = (200\vec{i} - 100\vec{j} + 200\vec{k})\text{N}$$

Módulo de ***F***:

$$F = \sqrt{200^2 + 100^2 + 200^2}$$

$$F = 300\text{N}$$



(c)

Solução do Exercício 1

Ângulos diretores de ***F***:

$$\vec{u}_F = \frac{\vec{F}}{F}$$

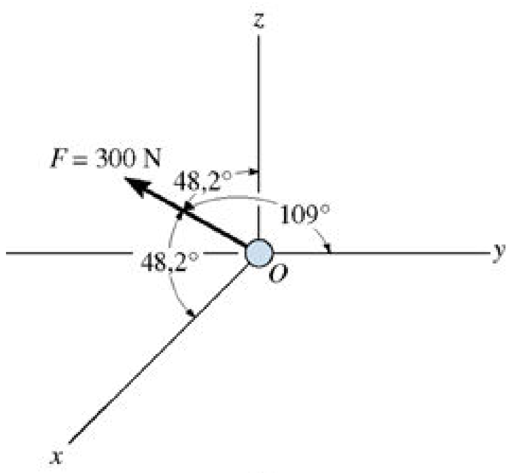
$$\vec{u}_F = \frac{200\vec{i} - 100\vec{j} + 200\vec{k}}{300}$$

$$\vec{u}_F = \left(\frac{200}{300}\right)\vec{i} - \left(\frac{100}{300}\right)\vec{j} + \left(\frac{200}{300}\right)\vec{k}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{200}{300}\right) \rightarrow \alpha = 48{,}2°$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{-100}{300}\right) \rightarrow \beta = 109°$$

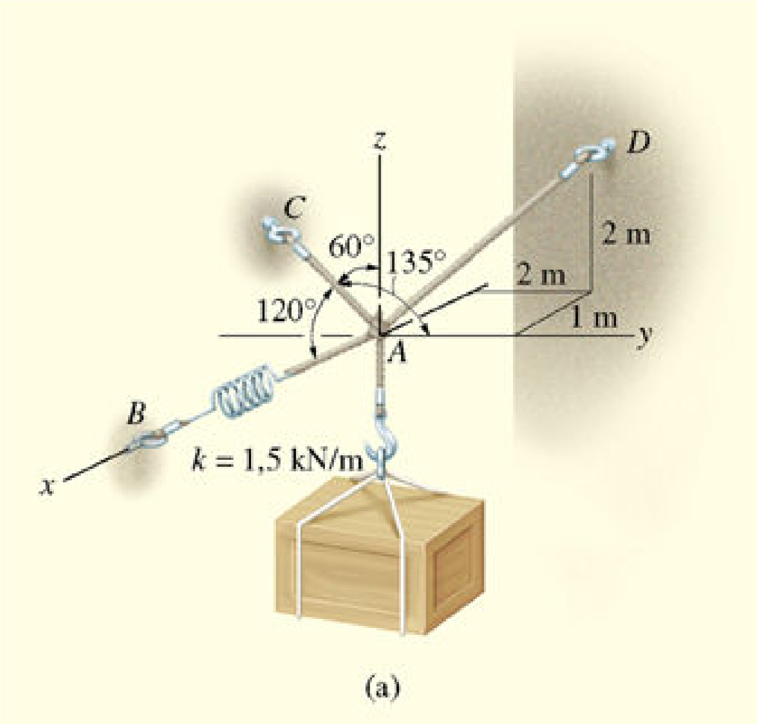
$$\gamma = \arccos\left(\frac{200}{300}\right) \rightarrow \gamma = 48{,}2°$$



(c)

Exercício 2

- 2) A caixa de 100kg mostrada na figura é suportada por três cordas, uma delas é acoplada na mola mostrada. Determine a força nas cordas *AC* e *AD* e a deformação da mola.



Solução do Exercício 2

Determinação das forças:

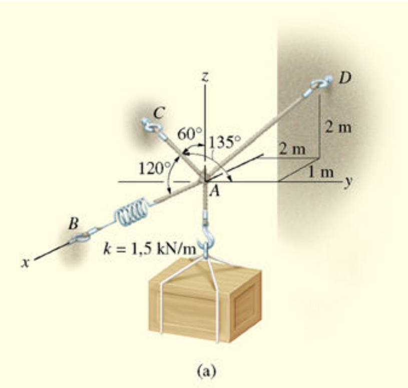
$$\vec{F}_B = (F_B \vec{i})\text{N}$$

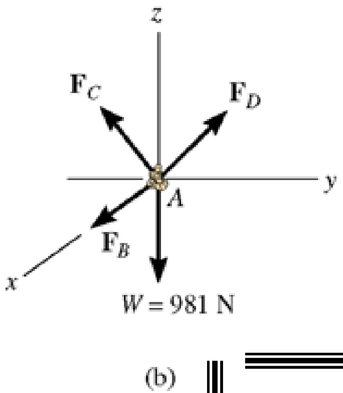
$$\vec{F}_C = (F_C \cdot \cos 120° \vec{i} + F_C \cdot \cos 135° \vec{j} + F_C \cdot \cos 60 \vec{k})$$

$$\vec{F}_C = (-0{,}5 \cdot F_C \vec{i} - 0{,}707 \cdot F_C \vec{j} + 0{,}5 \cdot F_C \vec{k})\text{N}$$

$$\vec{W} = (-981 \vec{k})\text{N}$$

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$





Vetor unitário e Vetor posição:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}}$$

$$\vec{r}_{AD} = -1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \text{ m}$$

$$r_{AD} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$$

$$r_{AD} = 3\text{m}$$

$$\vec{u}_{AD} = \frac{-1\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$$

$$\vec{u}_{AD} = -0{,}333\vec{i} + 0{,}667\vec{j} + 0{,}667\vec{k}$$

$$\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_{AD}$$

$$\vec{F}_D = F_D \cdot (-0{,}333\vec{i} + 0{,}667\vec{j} + 0{,}667\vec{k})$$

$$\vec{F}_D = (-0{,}333 \cdot F_D \vec{i} + 0{,}667 \cdot F_D \vec{j} + 0{,}667 \cdot F_D \vec{k})\text{N}$$

Solução do Exercício 2

Condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{W} = 0$$

$$F_B\vec{i} - 0{,}5 \cdot F_C\vec{i} - 0{,}707 \cdot F_C\vec{j} + 0{,}5 \cdot F_C\vec{k} - 0{,}333 \cdot F_D\vec{i} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{j} + 0{,}667 \cdot F_D\vec{k} - 981\vec{k} = 0$$

Sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B - 0{,}5 \cdot F_C - 0{,}333 \cdot F_D = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -0{,}707 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 \cdot F_C + 0{,}667 \cdot F_D - 981 = 0 \quad \text{(III)}$$

Solução do Exercício 2

Solução das equações:

De (II):

$$F_D = \frac{0{,}707 \cdot F_C}{0{,}667} \longrightarrow F_D = 1{,}059 \cdot F_C \text{ (IV):}$$

Substituindo (IV) em (III):

$$0{,}5 \cdot F_C + (0{,}667 \cdot (1{,}059 \cdot F_C)) - 981 = 0$$

$$0{,}5 \cdot F_C + 0{,}706 \cdot F_C - 981 = 0$$

$$1{,}207 \cdot F_C - 981 = 0$$

$$F_C = \frac{981}{1{,}207}$$

$$F_C = 813\text{N}$$

Em (IV):

$$F_D = 1{,}059 \cdot 813$$

$$F_D = 862\text{N}$$

Em (I):

$$F_B - 0{,}5 \cdot 813 - 0{,}333 \cdot 862 = 0$$

$$F_B = 406{,}5 + 287{,}04$$

$$F_B = 693{,}7\text{N}$$

Deformação da mola:

$$F_B = k \cdot s$$

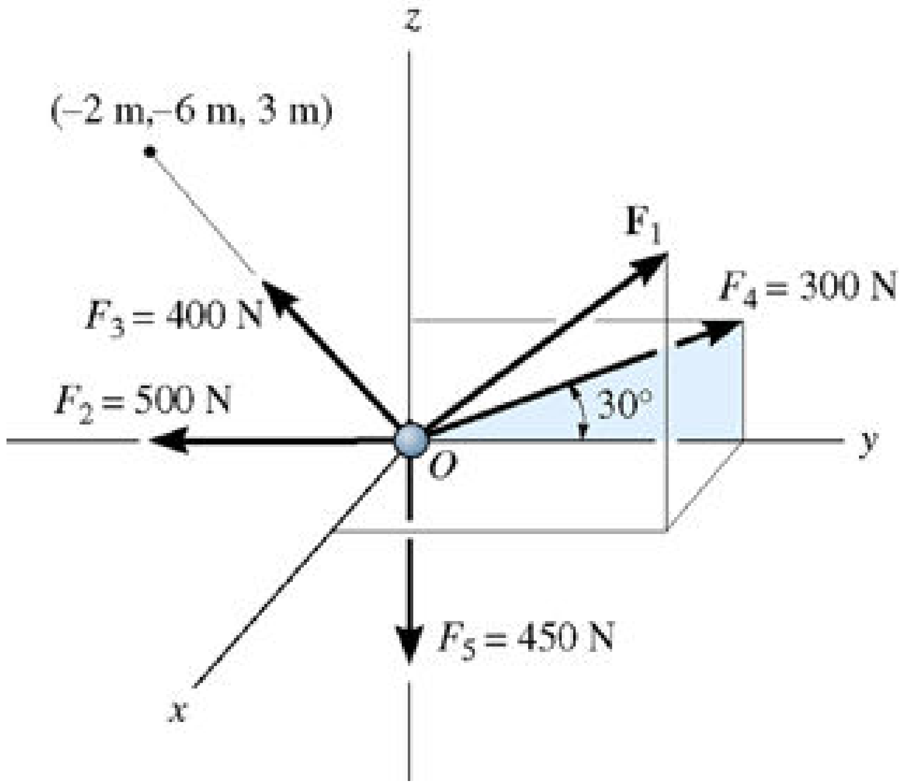
$$693{,}7 = 1500 \cdot s$$

$$s = \frac{693{,}7}{1500}$$

$$s = 0{,}462\text{m}$$

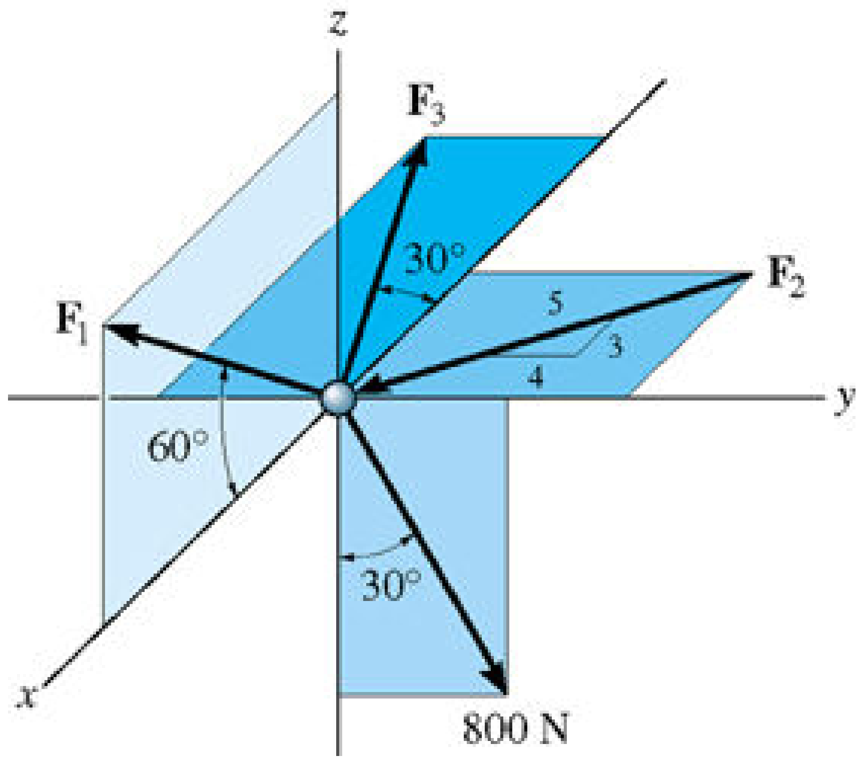
Exercícios Propostos

- 1) Determine a intensidade e o sentido de F_1 necessários para manter o sistema de forças concorrentes em equilíbrio.



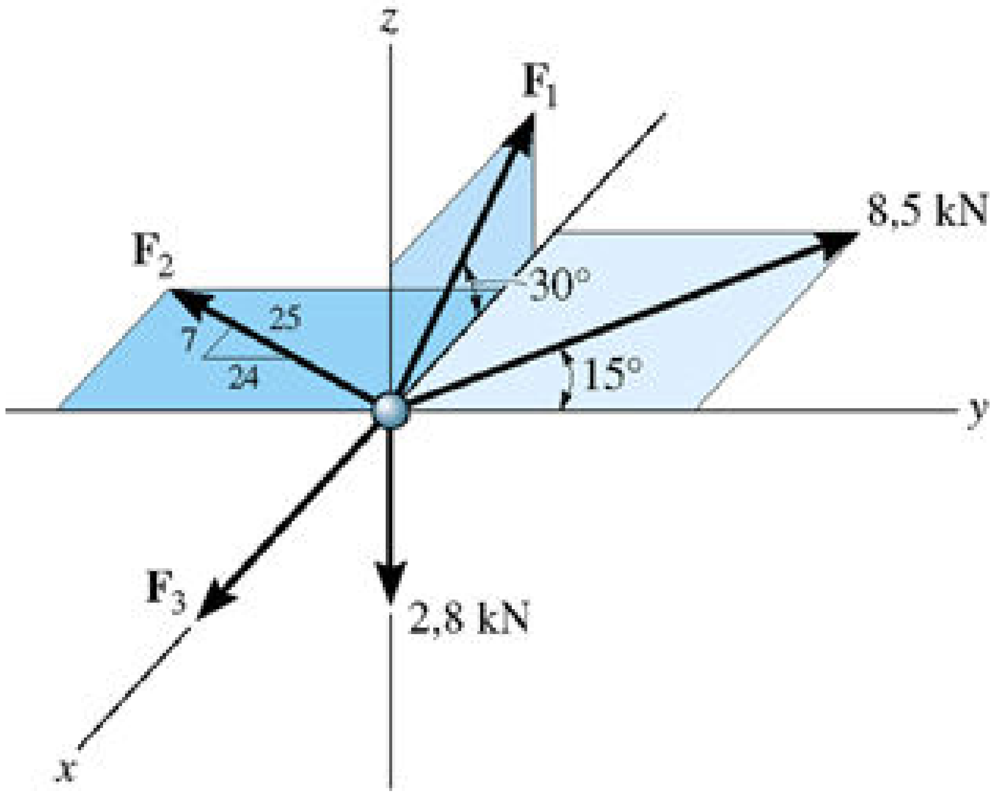
Exercícios Propostos

- 2) Determine as intensidades de F_1, F_2 e F_3 para a condição de equilíbrio do ponto material.



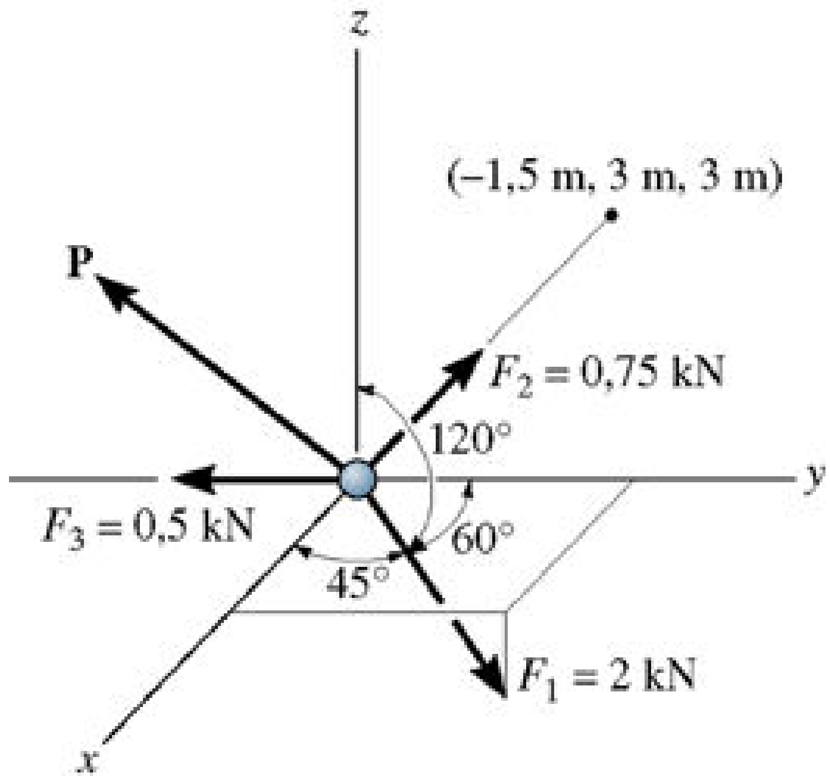
Exercícios Propostos

- 3) Determine as intensidades de F_1, F_2 e F_3 para a condição de equilíbrio do ponto material.



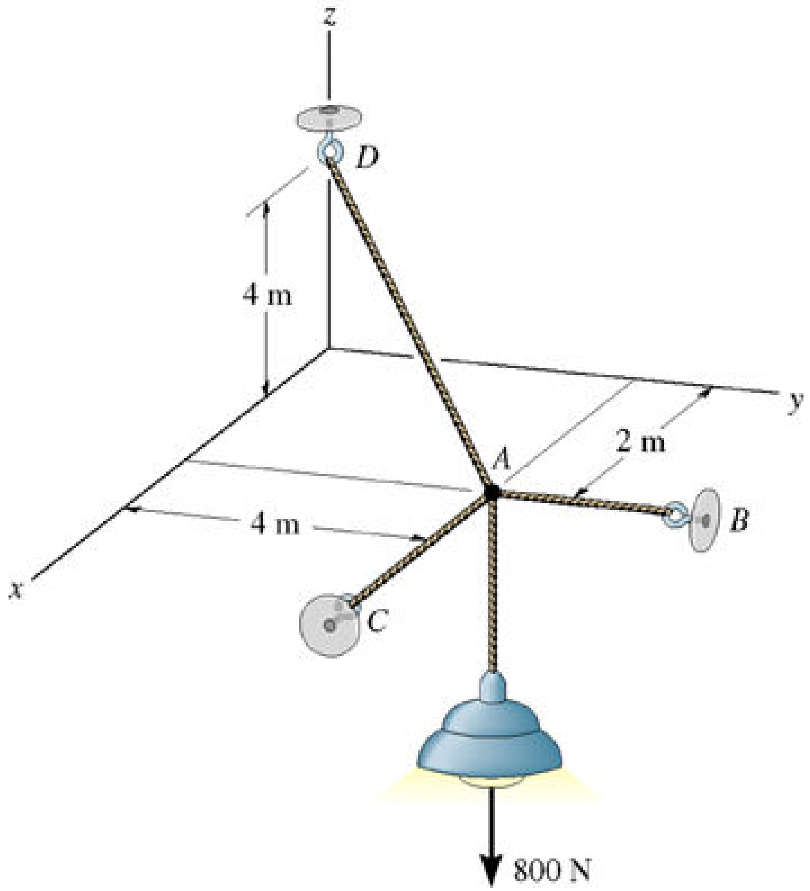
Exercícios Propostos

- 4) Determine a intensidade e o sentido de *P* necessários para manter o sistema de forças concorrentes em equilíbrio.



Exercícios Propostos

- 5) Os três cabos são usados para suportar a luminária de 800N. Determine a força desenvolvida em cada cabo para a condição de equilíbrio.



Próxima Aula

- Solução de Exercícios.
- Equilíbrio em Três Dimensões.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 8 – Equilíbrio do Ponto Material em Três Dimensões

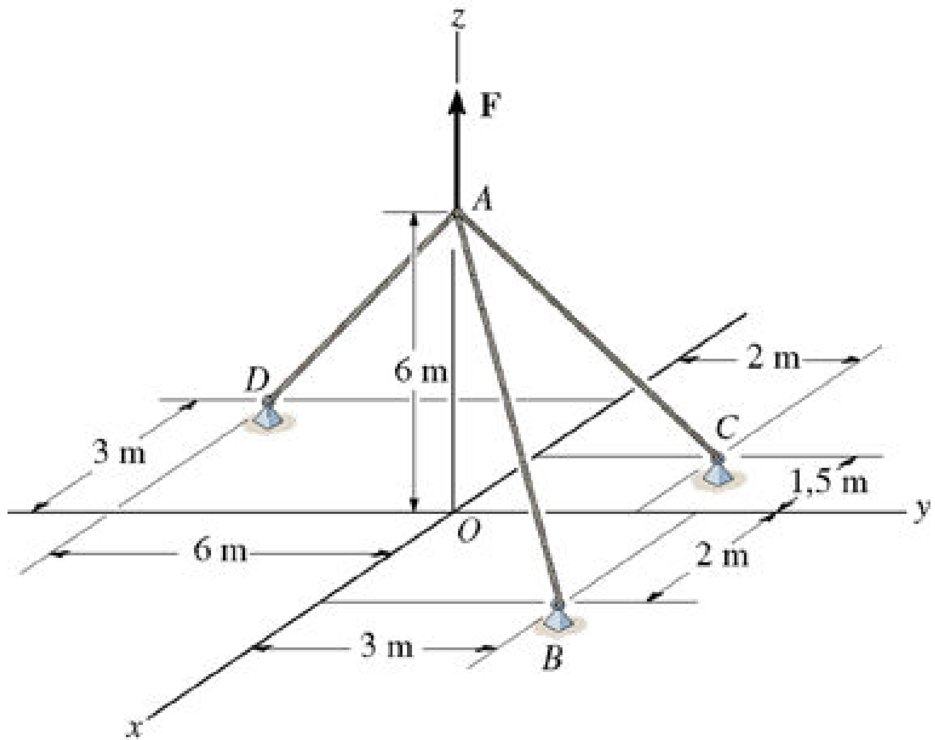
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Solução de Exercícios.
- Equilíbrio em Três Dimensões.

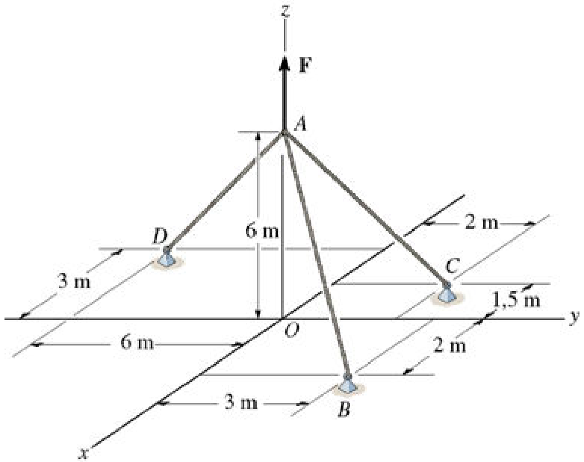
Exercício 1

- 1) Considere que o cabo ***AB*** esteja submetido a uma força de 700N. Determine as forças de tração nos cabos ***AC*** e ***AD*** e a intensidade da força vertical ***F***.



Solução do Exercício 1

Determinação da Força em Cada Cabo:



$A \quad (0,\ 0, 6)$

$B \quad (2, 3, 0)$

$C \quad (-1{,}5; 2; 0)$

$D \quad (-3, -6, 0)$

Força F: $\vec{F} = (F\vec{k})$

Cabo AB:

Vetor posição:

$$\vec{r}_{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k} \text{ m}$$

Módulo do vetor posição:

$$r_{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$r_{AB} = 7 \text{ m}$$

Vetor unitário:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}}{7}$$

$$\vec{u}_{AB} = 0{,}286\vec{i} + 0{,}429\vec{j} - 0{,}857\vec{k}$$

Vetor Força AB:

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{F}_{AB} = 700 \cdot (0{,}286\vec{i} + 0{,}429\vec{j} - 0{,}857\vec{k})$$

$$\vec{F}_{AB} = (200\vec{i} + 300\vec{j} - 600\vec{k}) \text{N}$$

Solução do Exercício 1

Cabo AC:
Vetor posição:

$$\vec{r}_{AC} = -1{,}5\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}\ \text{m}$$

Módulo do vetor posição:

$$r_{AC} = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2 + 6^2}$$

$$r_{AC} = 6{,}5\ \text{m}$$

Vetor unitário:

$$\vec{u}_{AC} = \frac{-1{,}5\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}}{6{,}5}$$

$$\vec{u}_{AC} = -0{,}230\vec{i} + 0{,}307\vec{j} - 0{,}923\vec{k}$$

Vetor Força AC:

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot \vec{u}_{AC}$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot (-0{,}230\vec{i} + 0{,}307\vec{j} - 0{,}923\vec{k})$$

$$\vec{F}_{AC} = (-0{,}230 \cdot F_{AC}\vec{i} + 0{,}307 \cdot F_{AC}\vec{j} - 0{,}923 \cdot F_{AC}\vec{k})\ \text{N}$$

Cabo AD:
Vetor posição:

$$\vec{r}_{AD} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}\ \text{m}$$

Módulo do vetor posição:

$$r_{AD} = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2 + 6^2}$$

$$r_{AD} = 9\ \text{m}$$

Vetor unitário:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{-3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}}{9}$$

$$\vec{u}_{AD} = -0{,}333\vec{i} - 0{,}666\vec{j} - 0{,}666\vec{k}$$

Vetor Força AD:

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{u}_{AD}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot (-0{,}333\vec{i} - 0{,}666\vec{j} - 0{,}666\vec{k})$$

$$\vec{F}_{AD} = (-0{,}333 \cdot F_{AD}\vec{i} - 0{,}666 \cdot F_{AD}\vec{j} - 0{,}666 \cdot F_{AD}\vec{k})\ \text{N}$$

Solução do Exercício 1

Condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AD} + \vec{F} = 0$$

$$200\vec{i} + 300\vec{j} - 600\vec{k} - 0{,}230 \cdot F_{AC}\vec{i} + 0{,}307 \cdot F_{AC}\vec{j} - 0{,}923 \cdot F_{AC}\vec{k} - 0{,}333 \cdot F_{AD}\vec{i} - 0{,}666 \cdot F_{AD}\vec{j} - 0{,}666 \cdot F_{AD}\vec{k} + F\vec{k} = 0$$

Sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 200 - 0{,}230 \cdot F_{AC} - 0{,}333 \cdot F_{AD} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 300 + 0{,}307 \cdot F_{AC} - 0{,}666 \cdot F_{AD} = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad -600 - 0{,}923 \cdot F_{AC} - 0{,}666 \cdot F_{AD} + F = 0 \qquad \text{(III)}$$

Solução do Exercício 1

Solução das equações:

De (I):

$$F_{AD} = \frac{200 - 0,230 \cdot F_{AC}}{0,333}$$

$$F_{AD} = 600 - 0,690 \cdot F_{AC} \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (II):

$$300 + 0,307 \cdot F_{AC} - (0,666 \cdot (600 - 0,690 \cdot F_{AC})) = 0$$

$$300 + 0,307 \cdot F_{AC} - 400 + 0,459 \cdot F_{AC} = 0$$

$$-100 + 0,766 \cdot F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = \frac{100}{0,766} \Rightarrow F_{AC} = 131,57 \text{ N}$$

Em (IV):

$$F_{AD} = 600 - 0,690 \cdot F_{AC}$$

$$F_{AD} = 600 - 0,690 \cdot 131,57$$

$$F_{AD} = 509,21 \text{ N}$$

Em (III):

$$-600 - 0,923 \cdot F_{AC} - 0,666 \cdot F_{AD} + F = 0$$

$$-600 - 0,923 \cdot 131,57 - 0,666 \cdot 509,21 + F = 0$$

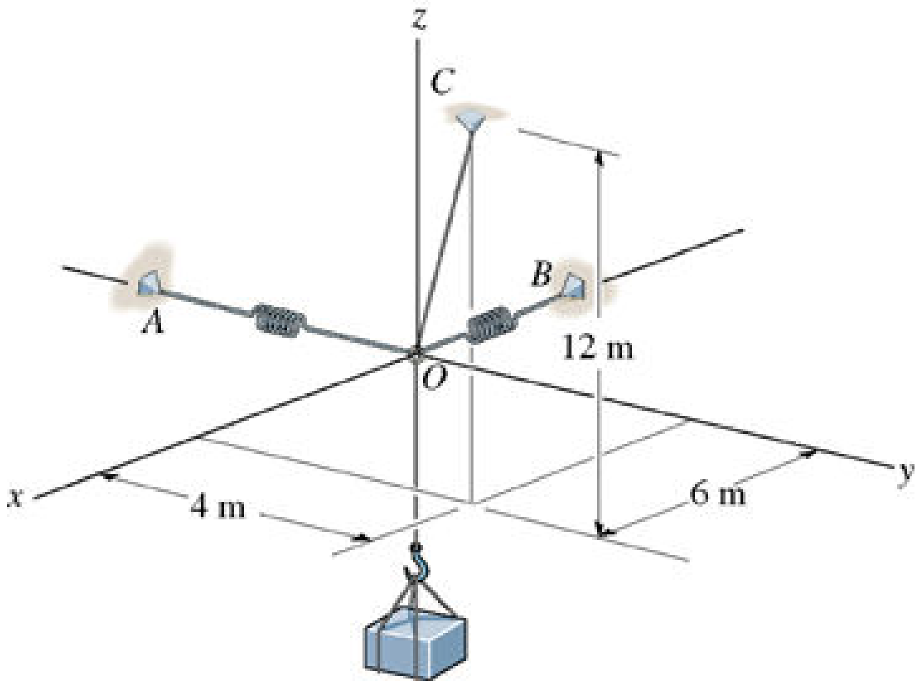
$$F = 600 + 0,923 \cdot 131,57 + 0,666 \cdot 509,21$$

$$F = 600 + 121,43 + 339,13$$

$$F = 1060,57 \text{ N}$$

Exercício 2

- 2) Determine a deformação necessária em cada mola para manter a caixa de 20kg na posição de equilíbrio. Cada mola tem comprimento de 2m sem deformação e rigidez k = 300N/m.



Solução do Exercício 2

Determinação das Forças :

Cabo OA:

$$\vec{F}_{OA} = -F_{OA}\vec{j} \text{ N}$$

Cabo OB:

$$\vec{F}_{OB} = -F_{OB}\vec{i} \text{ N}$$

Peso:

$$\vec{W} = (-20 \cdot 9{,}81\vec{k})$$

$$\vec{W} = (-196{,}2\vec{k})\text{N}$$

Cabo OC:

Vetor posição:

$$\vec{r}_{OC} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k} \text{ m}$$

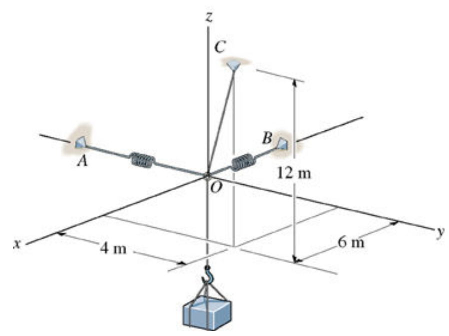
Módulo do vetor posição:

$$r_{OC} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 12^2} \qquad r_{OC} = 14 \text{ m}$$

Vetor unitário:

$$\vec{u}_{OC} = \frac{\vec{6} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{14}$$

$$\vec{u}_{OC} = 0{,}428\vec{i} + 0{,}285\vec{j} + 0{,}857\vec{k}$$



Vetor Força AB:

$$\vec{F}_{OC} = F_{OC} \cdot \vec{u}_{OC}$$

$$\vec{F}_{OC} = F_{OC} \cdot (0{,}428\vec{i} + 0{,}285\vec{j} + 0{,}857\vec{k})$$

$$\vec{F}_{OC} = (0{,}428 \cdot F_{OC}\vec{i} + 0{,}285 \cdot F_{OC}\vec{j} + 0{,}857 \cdot F_{OC}\vec{k}) \text{ N}$$

Solução do Exercício 2

Condição de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_{OA} + \vec{F}_{OB} + \vec{F}_{OC} + \vec{W} = 0$$

$$-F_{OA}\vec{j} - F_{OB}\vec{i} + 0{,}428 \cdot F_{OC}\vec{i} + 0{,}285 \cdot F_{OC}\vec{j} + 0{,}857 \cdot F_{OC}\vec{k} - 196{,}2\vec{k}) = 0$$

Sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{OB} + 0{,}428 \cdot F_{OC} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{OA} + 0{,}285 \cdot F_{OC} = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}857 \cdot F_{OC} - 196{,}2 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Solução do Exercício 2

Solução das equações:

De (III):

$$F_{OC} = \frac{196,2}{0,857}$$

$F_{OC} = 228,93$ N

Em (II):

$$-F_{OA} + 0,285 \cdot 228,93 = 0$$

$F_{OA} = 65,24$ N

Em (I):

$$-F_{OB} + 0,428 \cdot 228,93 = 0$$

$F_{OB} = 97,98$ N

Deformação da Molas:

Mola OA:

$$F_{OA} = k \cdot s_{OA}$$

$$65,24 = 300 \cdot s_{OA}$$

$$s_{OA} = \frac{65,24}{300}$$

$s_{OA} = 0,217$ m

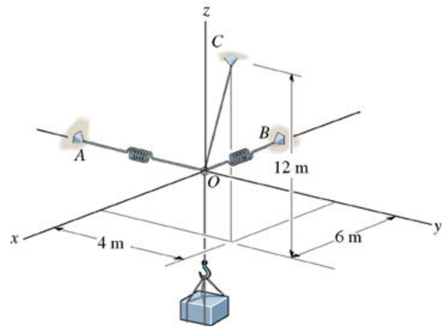
Mola OB:

$$F_{OB} = k \cdot s_{OB}$$

$$97,98 = 300 \cdot s_{OB}$$

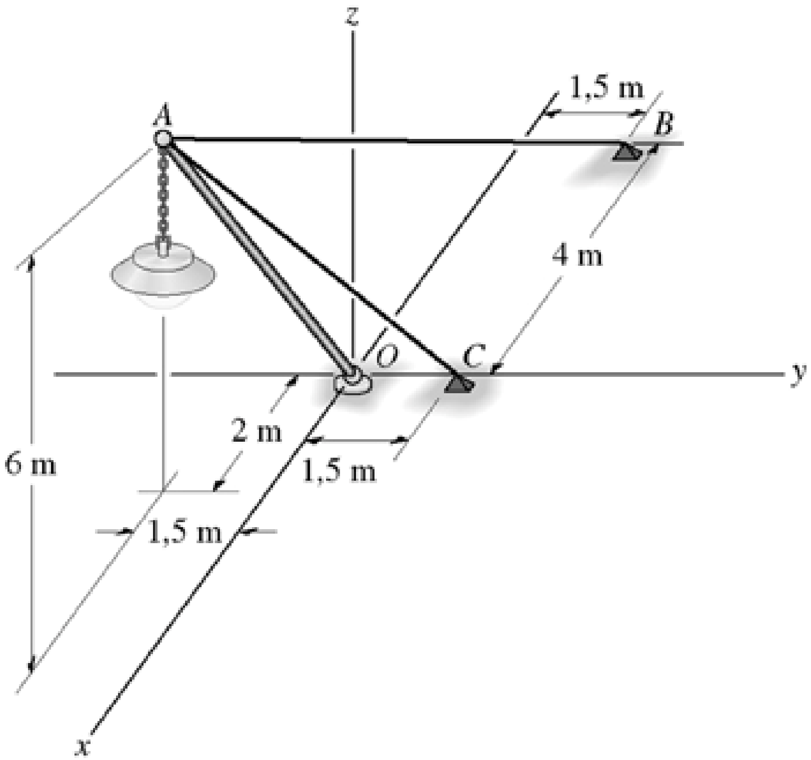
$$s_{OB} = \frac{97,98}{300}$$

$s_{OB} = 0,326$ m



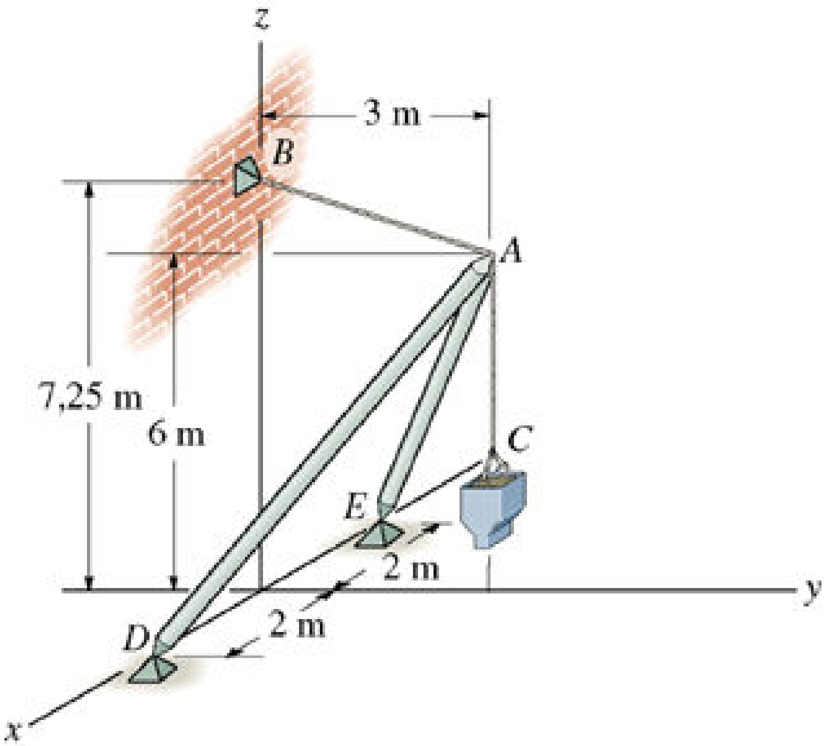
Exercícios Propostos

- 1) Os cabos *AB* e *AC* suportam uma tração máxima de 500N e o poste, uma compressão máxima de 300N. Determine o peso da luminária sustentada na posição mostrada. A força no poste atua alongo de seu próprio eixo.



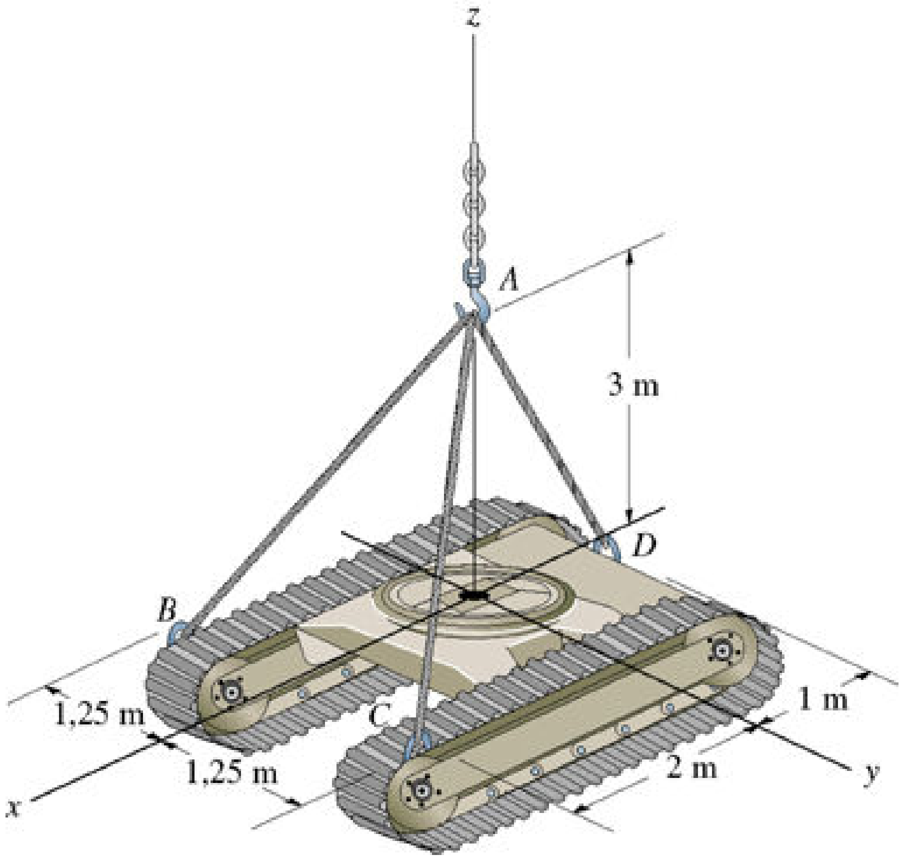
Exercícios Propostos

- 2) O cabo suporta a caçamba e seu conteúdo que tem massa total de 300kg. Determine as forças desenvolvidas nas escoras *AD* e *AE* e a força na parte *AB* do cabo para a condição de equilíbrio. A força em cada escora atua ao longo do seu próprio eixo.



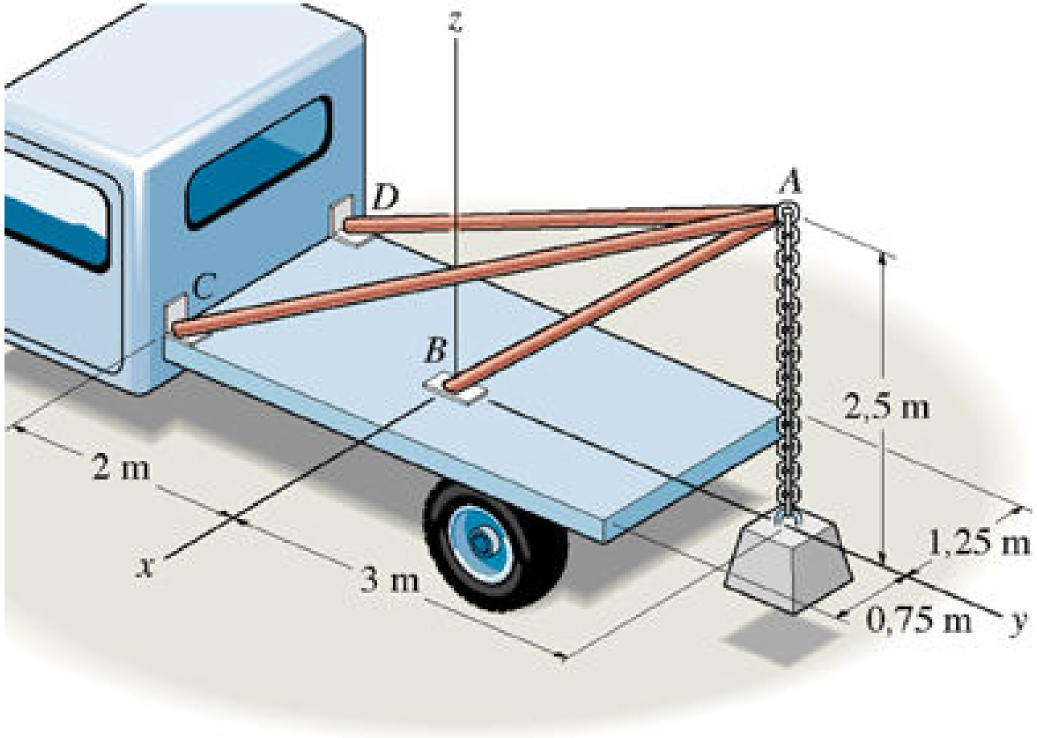
Exercícios Propostos

- 3) Determine a força necessária em cada um dos três cabos para levantar a escavadeira que tem massa de 8 toneladas.



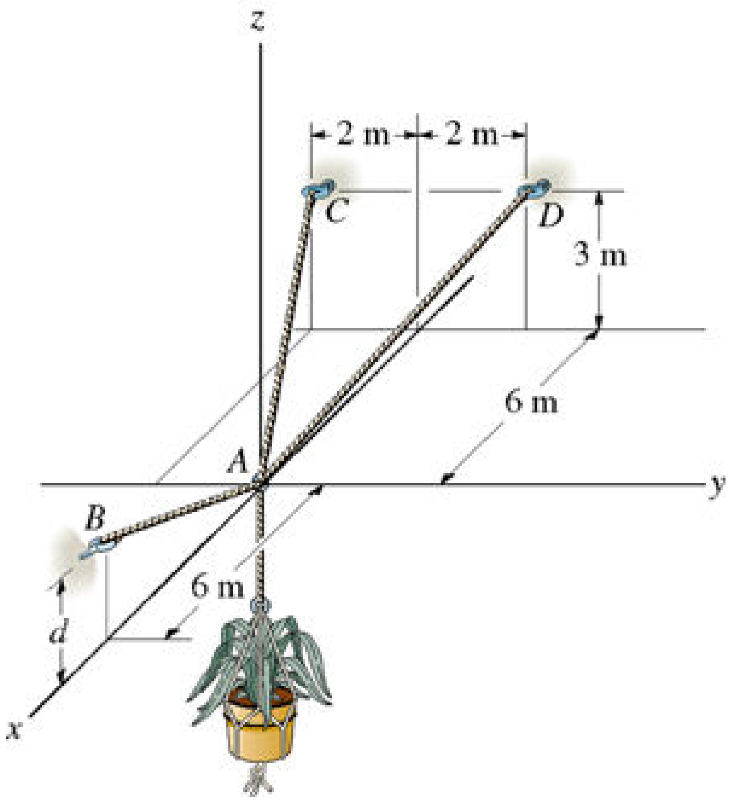
Exercícios Propostos

- 4) Determine a força necessária que atua ao longo do eixo de cada uma das três escoras para suportar o bloco de 500kg.



Exercícios Propostos

- 5) O vaso é suportado pelos cabos *AB*, *AC* e *AD*. Determine a força que atua em cada cabo para a condição de equilíbrio. Considere *d* = 2,5m.



Próxima Aula

- Avaliação 1.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 9 – Avaliação 1

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Avaliação 1

- Matéria da Prova:

- Aula 1 - Definição de Mecânica, Conceitos Fundamentais e Sistema Internacional de Unidades
- Aula 2 - Escalares e Vetores - Lei dos Senos, Lei dos Cossenos e Regra do Paralelogramo
- Aula 3 - Sistema de Forças Coplanares
- Aula 4 - Adição e Subtração de Vetores Cartesianos
- Aula 5 - Vetor Posição e Produto Escalar
- Aula 6 - Equilíbrio do Ponto Material em Duas Dimensões
- Aula 7 - Equilíbrio do Ponto Material em Três Dimensões
- Aula 8 - Equilíbrio do Ponto Material em Três Dimensões

Próxima Aula

- Momento de uma Força.
- Problemas em Duas Dimensões.
- Formulação Escalar para Cálculo de Momentos.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 10 – Momento de uma Força, Formulação Escalar

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Momento de uma Força.
- Formulação Escalar.
- Momentos em Sistemas Bidimensionais.

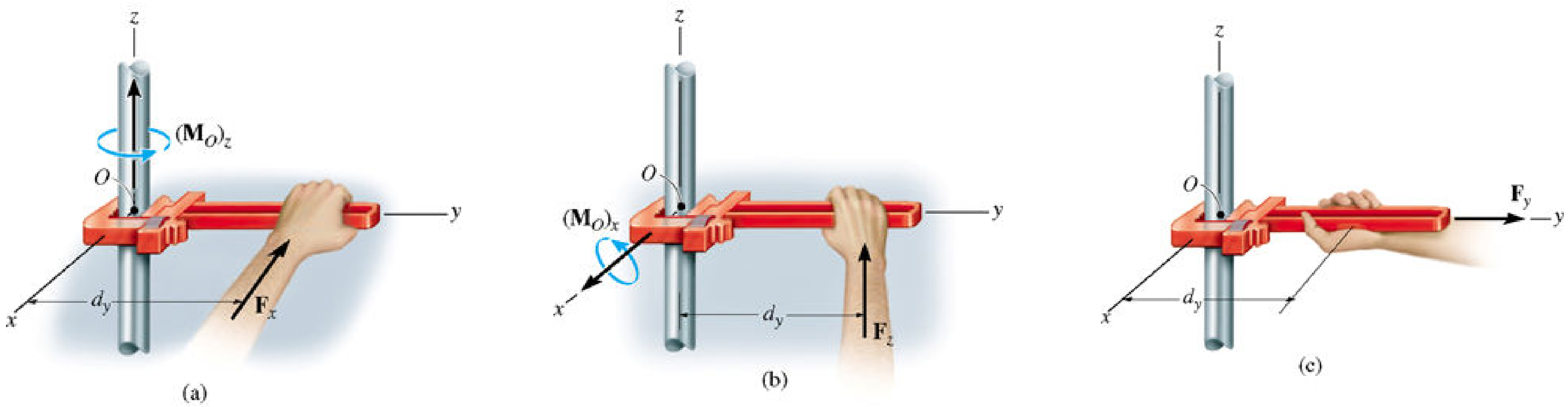
Momento de uma Força - Definição

- O momento de uma força em relação a um ponto ou a um eixo, fornece uma medida da tendência dessa força provocar a rotação de um corpo em torno do ponto ou do eixo.
- Para problemas em duas dimensões é mais conveniente se utilizar uma formulação escalar e para problemas em três dimensões a formulação vetorial é mais conveniente.

Momento de uma Força - Definição

- Quanto maior a força ou a distância (braço de momento), maior é o efeito da rotação.
- A tendência de rotação também é chamada de torque, momento de uma força ou simplesmente momento.

Exemplos de Momento



Momento – Eixo *z*

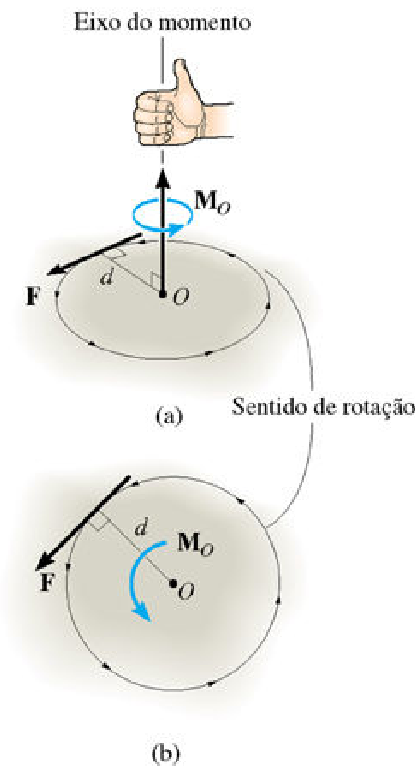
Momento – Eixo *x*

Não há momento no tubo

Formulação Escalar para Momento

- Momento é uma grandeza vetorial, possui intensidade direção e sentido.

$$M_O = F \cdot d$$



Convenção de sinais:

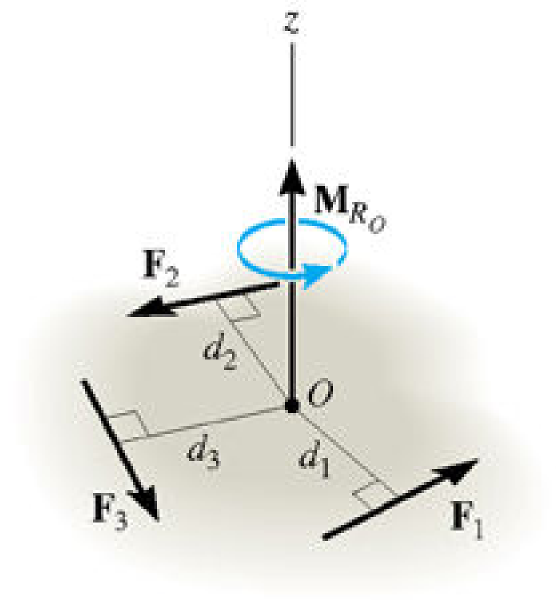
Segue a regra da mão direita

Rotação no sentido horário – Momento negativo

Rotação no sentido anti-horário – Momento positivo

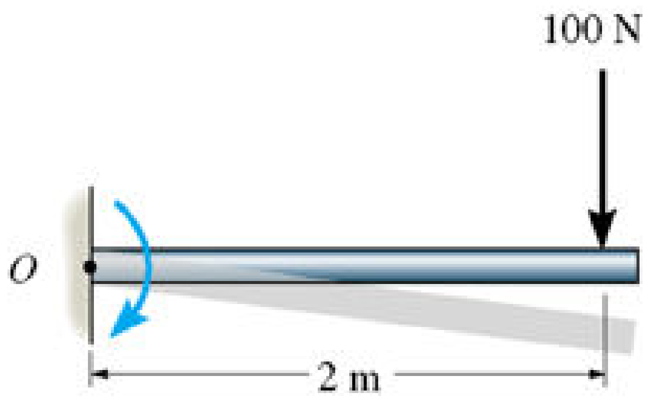
Momento Resultante de um Sistema de Forças Coplanares

$$M_{RO} = \sum F \cdot d$$

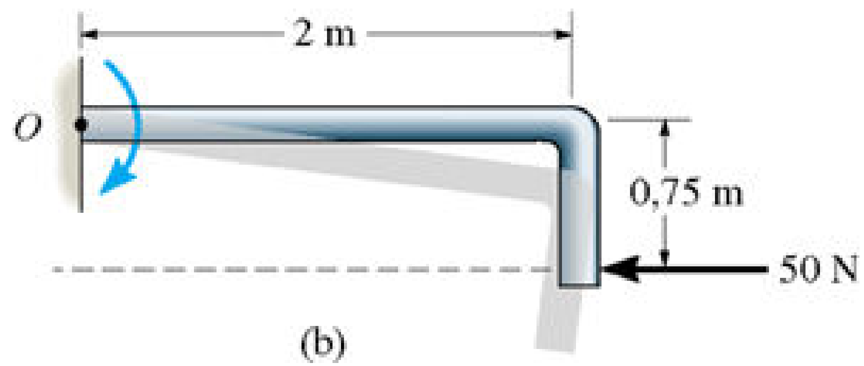


Exercício 1

- 1) Determine o momento da força em relação ao ponto *O* em cada uma das barras mostradas.



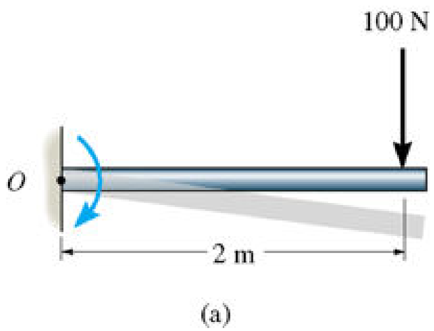
(a)



(b)

Solução do Exercício 1

Caso (a)

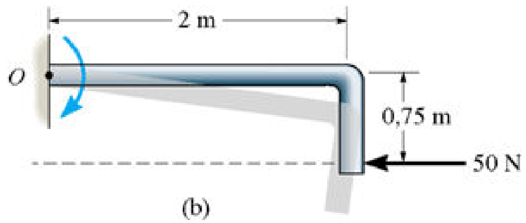


$$M_O = F \cdot d$$

$$M_O = 100 \cdot 2$$

$$M_O = 200 \text{ Nm}$$

Caso (b)



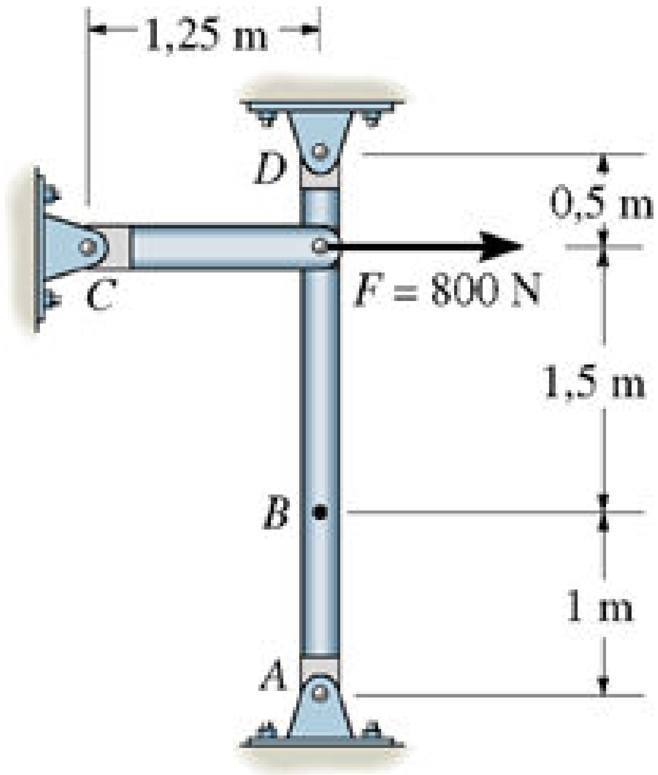
$$M_O = F \cdot d$$

$$M_O = 50 \cdot 0{,}75$$

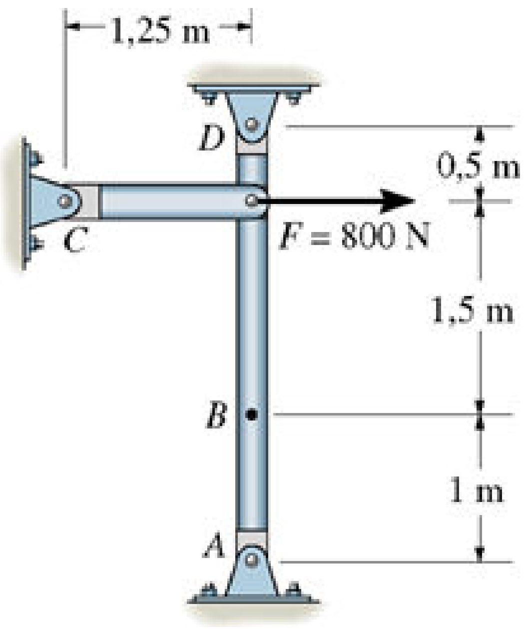
$$M_O = 37{,}5\text{Nm}$$

Exercício 2

- 2) Determine os momentos da força de 800N em relação aos pontos *A, B, C* e *D*.



Solução do Exercício 2



$$M_A = F \cdot d$$
$$M_A = 800 \cdot 2{,}5$$
$$M_A = 2000 \text{Nm}$$

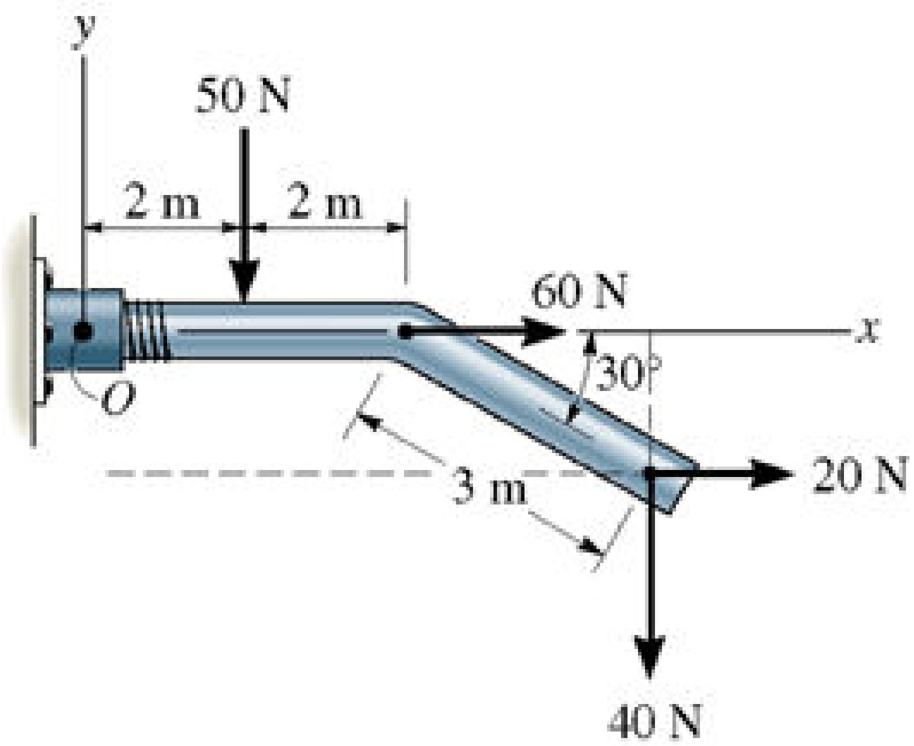
$$M_B = F \cdot d$$
$$M_B = 800 \cdot 1{,}5$$
$$M_B = 1200 \text{ Nm}$$

$$M_C = F \cdot d$$
$$M_C = 800 \cdot 0$$
$$M_C = 0$$

$$M_D = F \cdot d$$
$$M_D = 800 \cdot 0{,}5$$
$$M_D = 400 \text{ Nm}$$

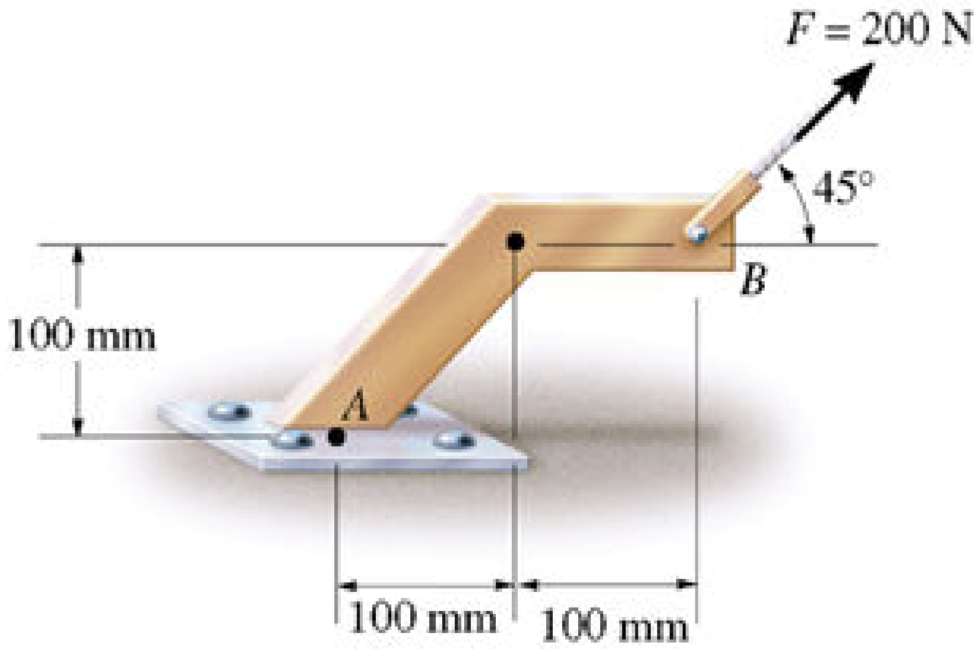
Exercícios Propostos

- 1) Determine o momento das forças que atuam na estrutura mostrada em relação ao ponto *O.*



Exercícios Propostos

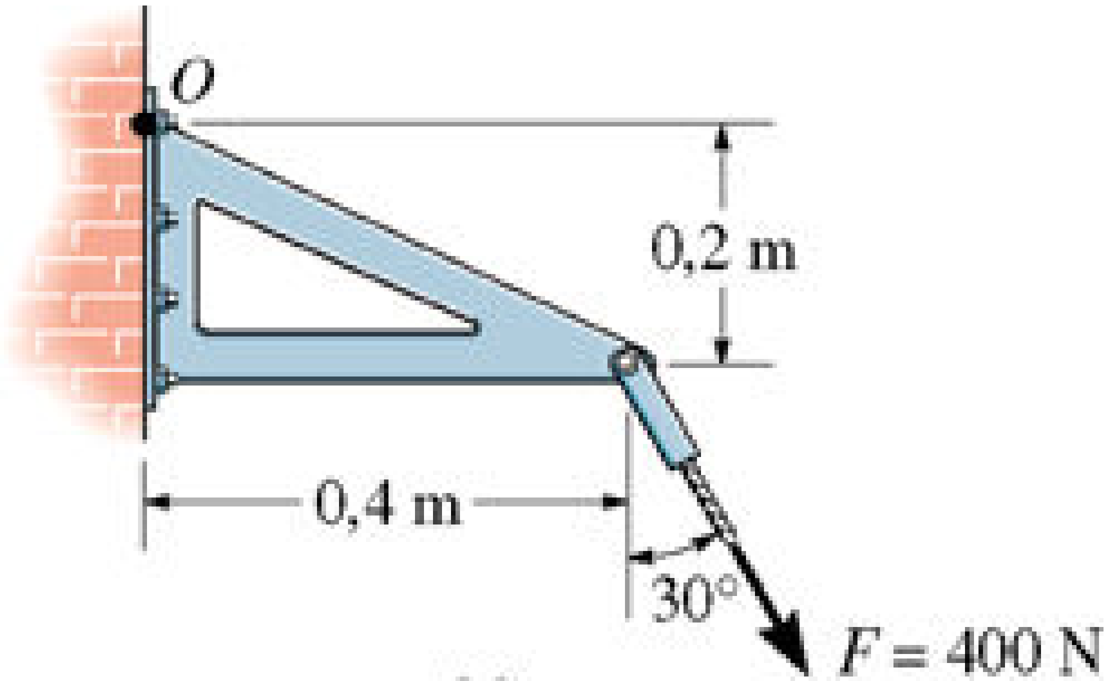
- 2) Determine o momento da força de 200N em relação ao ponto *A*.



(a)

Exercícios Propostos

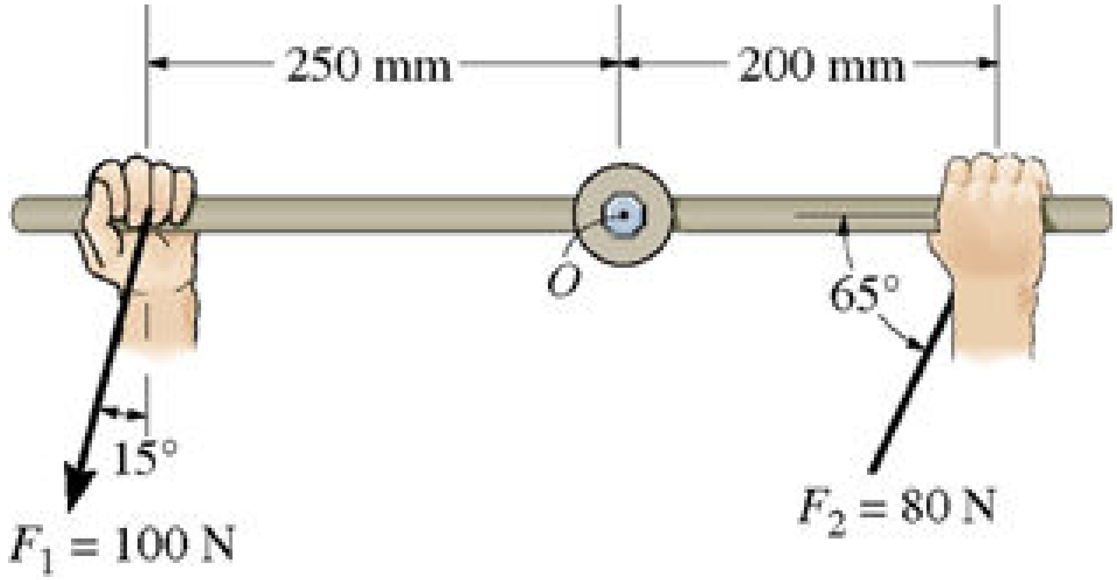
- 3) Determine o momento da força de 400N em relação ao ponto *O*.



(a)

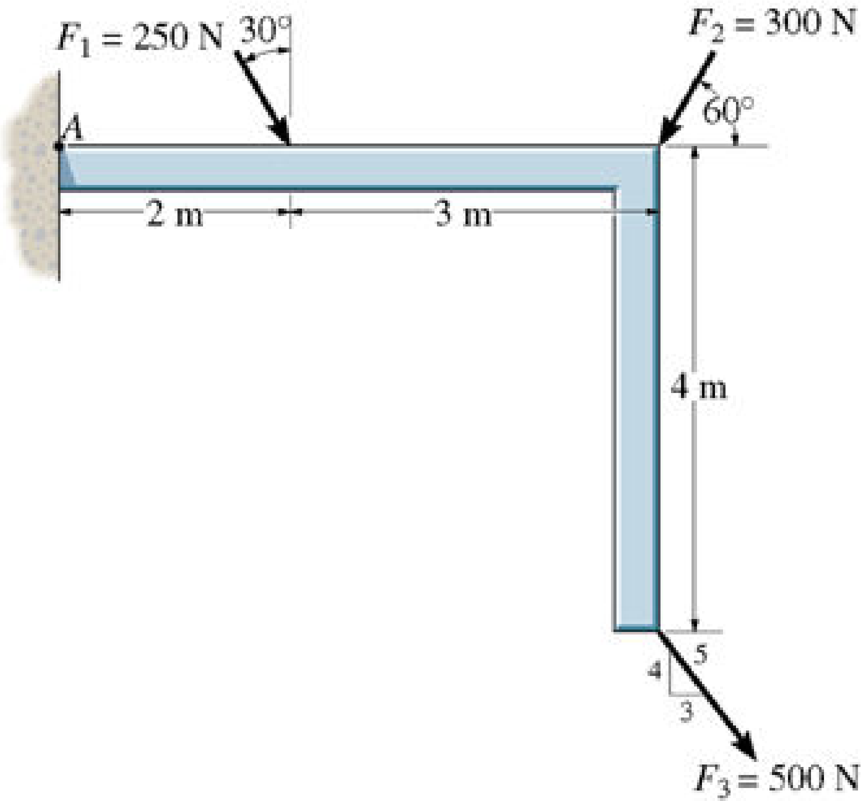
Exercícios Propostos

- 4) A chave de boca é utilizada para soltar o parafuso. Determine o momento de cada força em relação ao eixo que passa através do ponto *O*.



Exercícios Propostos

- 5) Determine o momento das forças que atuam na estrutura mostrada em relação ao ponto *A.*



Próxima Aula

- Princípio dos Momentos.
- Regras do Produto Vetorial.
- Momento em Sistemas Tridimensionais.

Mecânica Técnica

Aula 11 – Momento de uma Força, Formulação Vetorial

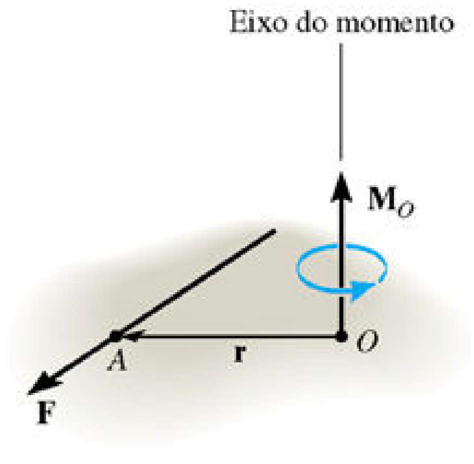
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Regras do Produto Vetorial.
- Princípio dos Momentos.
- Momento em Sistemas Tridimensionais.

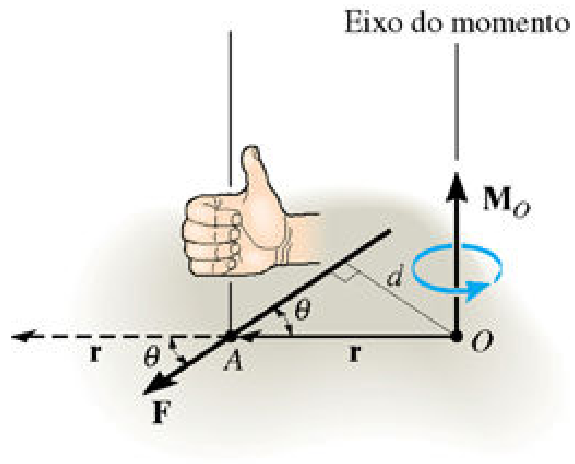
Momento de uma Força – Análise Vetorial

- O momento de uma força em relação a um ponto pode ser determinado através da aplicação das regras de produto vetorial.
- A regra do produto vetorial para o cálculo de momentos geralmente é aplicada para sistemas em três dimensões.



(a)

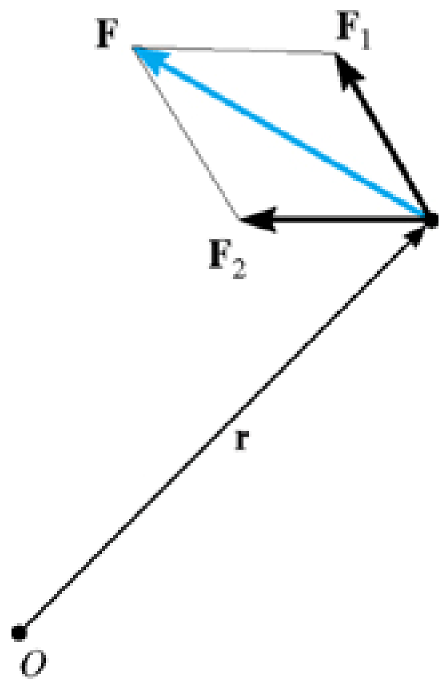
$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$



(b)

Princípio dos Momentos

- Conhecido como teorema de Varignon.
- O teorema estabelece que o momento de uma força em relação a um ponto é igual a soma dos momentos dos componentes das forças em relação ao mesmo ponto.

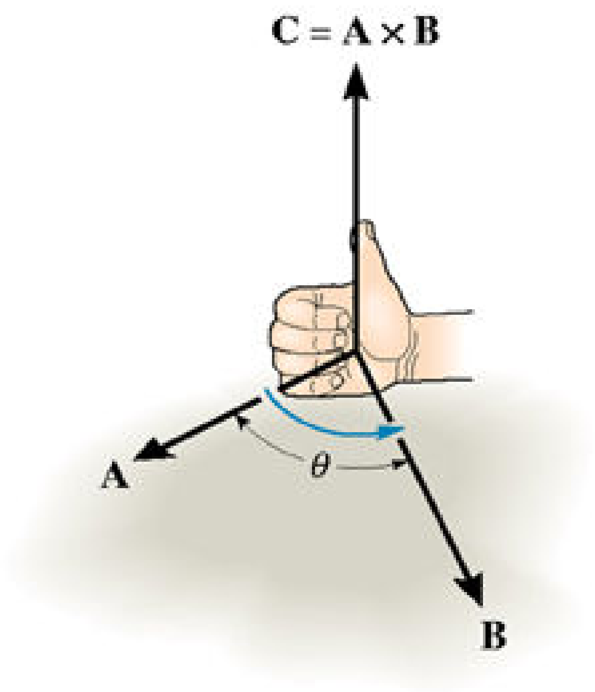


$$\vec{M}_O = (\vec{r} \times \vec{F}_1) + (\vec{r} \times \vec{F}_2)$$

Regras do Produto Vetorial

- O produto vetorial de dois vetores ***A*** e ***B*** produz o vetor ***C*** e matematicamente a operação é escrita do seguinte modo:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

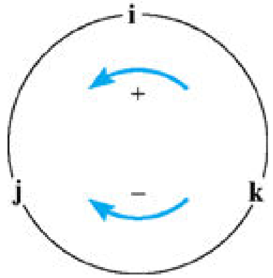


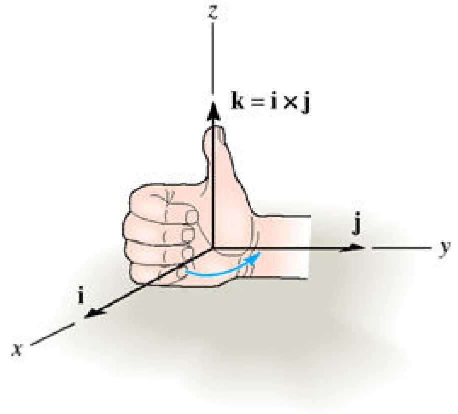
Formulação Vetorial Cartesiana

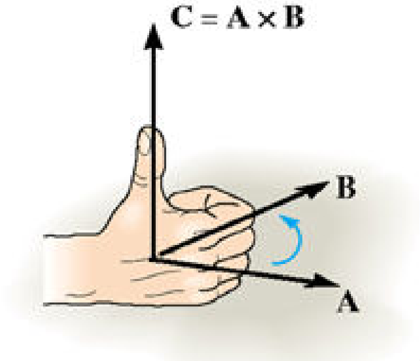
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

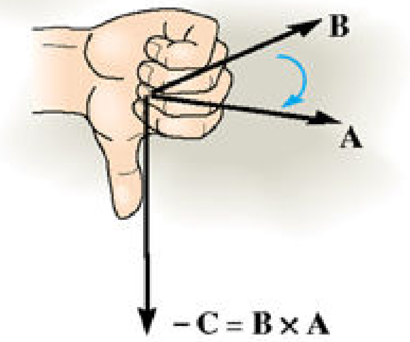
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \qquad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$







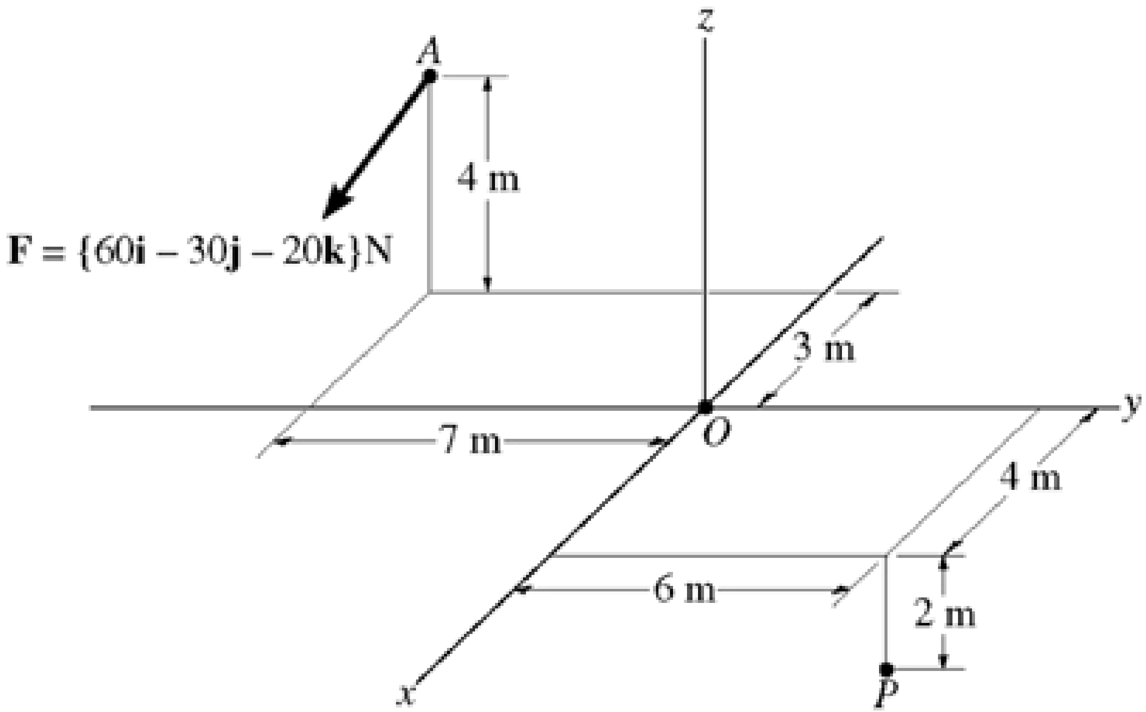


$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

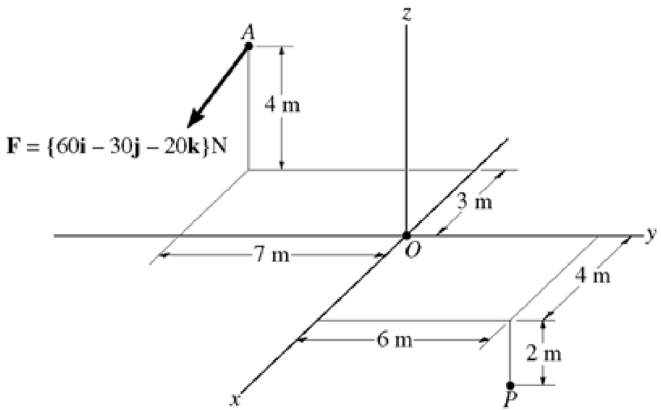
$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Exercício 1

- 1) Determine o momento da força ***F*** em relação ao ponto *O*. Expresse o resultado como um vetor cartesiano.



Solução do Exercício 1



Vetor Posição:

$$\vec{r}_{OA} = -3\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k} \text{ m}$$

Cálculo do Momento no Ponto A:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

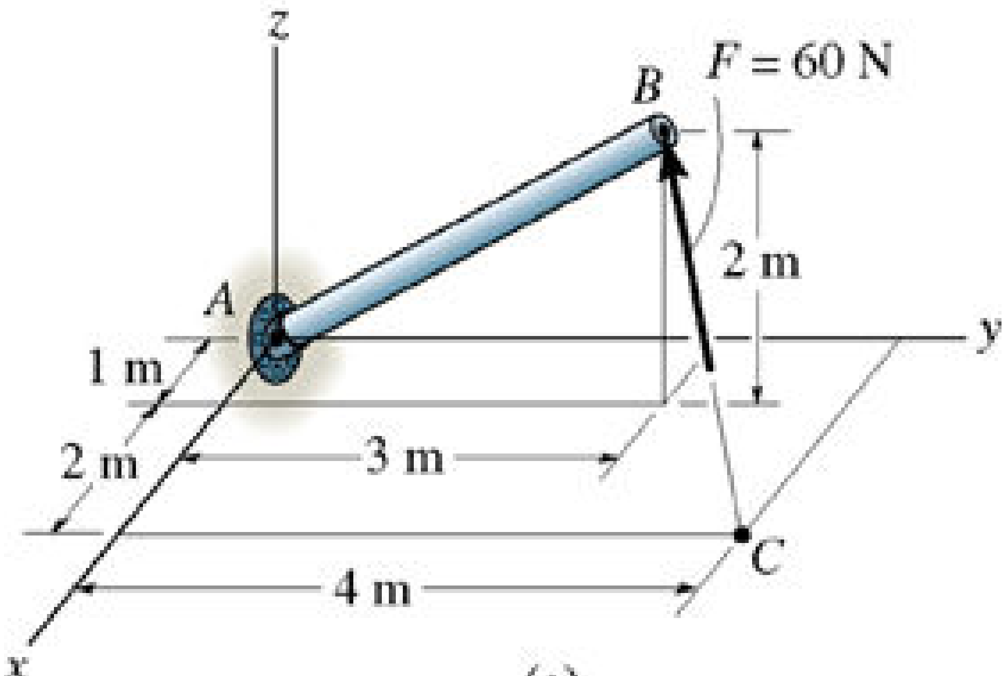
$$\vec{M}_O = (-3\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k}) \times (60\vec{i} - 30\vec{j} - 20\vec{k})$$

$$\vec{M}_O = 90\vec{k} - 60\vec{j} + 420\vec{k} + 140\vec{i} + 240\vec{j} + 120\vec{i}$$

$$\vec{M}_O = 260\vec{i} + 180\vec{j} + 510\vec{k} \text{ Nm}$$

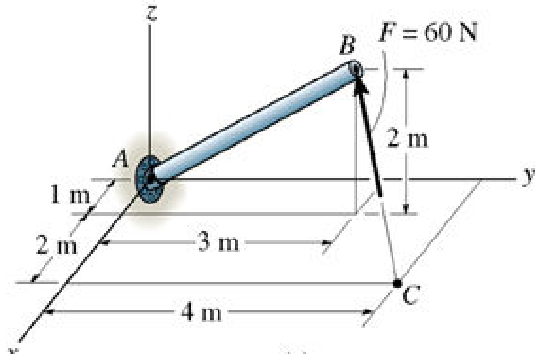
Exercício 2

- 2) O poste mostrado está sujeito a uma força de 60N na direção de *C* para *B*. Determine a intensidade do momento criado por essa força em relação ao suporte no ponto *A*.



(a)

Solução do Exercício 2



(a)

Vetores Posição:

$\vec{r}_{AB} = 1\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ m

$\vec{r}_{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ m

$\vec{r}_{CB} = (1-3)\vec{i} + (3-4)\vec{j} + (2-0)\vec{k}$

$\vec{r}_{CB} = -2\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}$ m

Módulo do Vetor Posição:

$r_{CB} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \Rightarrow r_{CB} = 3$m

Vetor Unitário:

$$\vec{u}_{CB} = \frac{-2\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$$

$$\vec{u}_{CB} = -0{,}666\vec{i} - 0{,}333\vec{j} + 0{,}666\vec{k}$$

Vetor Força:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_{CB}$$

$$\vec{F} = 60 \cdot (-0{,}666\vec{i} - 0{,}333\vec{j} + 0{,}666\vec{k})$$

$\vec{F} = (-40\vec{i} - 20\vec{j} + 40\vec{k})$ N

Cálculo do Momento no Ponto A:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_A = (1\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \times (-40\vec{i} - 20\vec{j} + 40\vec{k})$$

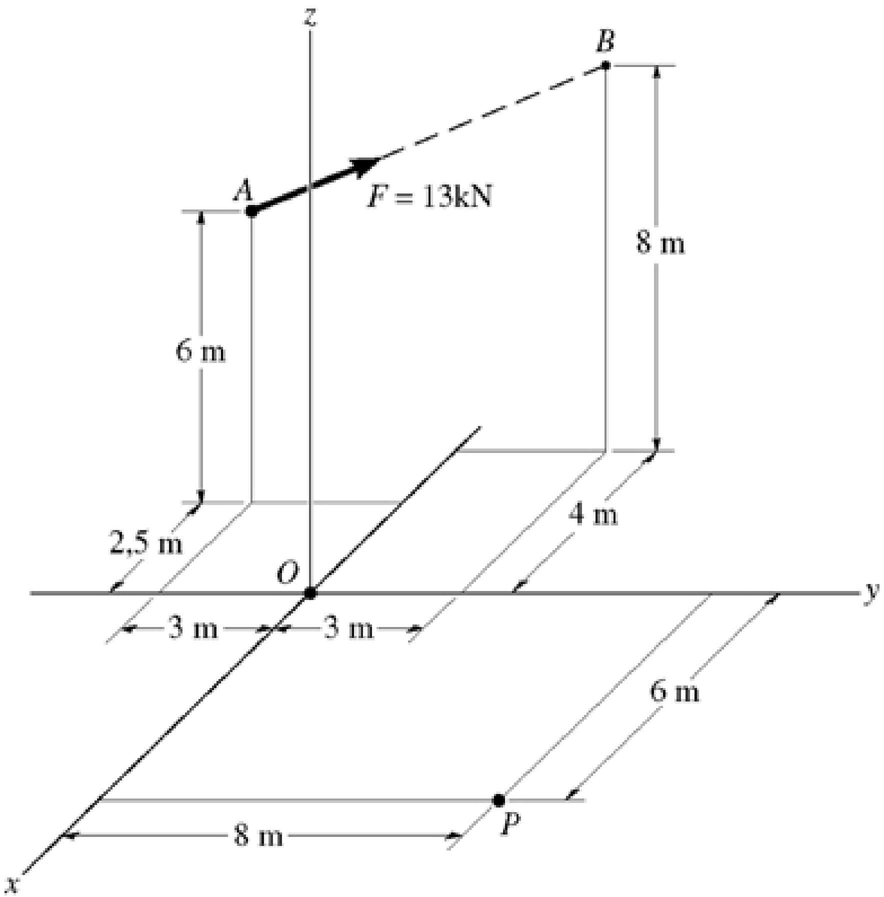
$$\vec{M}_A = -20\vec{k} - 40\vec{j} + 120\vec{k} + 120\vec{i} - 80\vec{j} + 40\vec{i}$$

$\vec{M}_A = 160\vec{i} - 120\vec{j} + 100\vec{k}$ Nm

$M_A = \sqrt{160^2 + 120^2 + 100^2} \Rightarrow M_A = 224$Nm

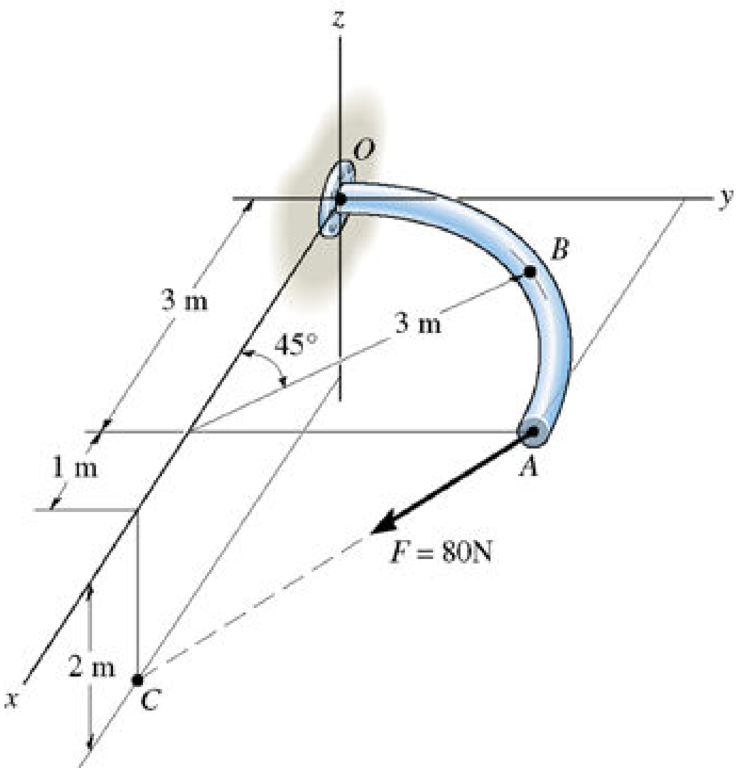
Exercícios Propostos

- 1) Determine o momento da força ***F*** em relação ao ponto *O*. Expresse o resultado como um vetor cartesiano.



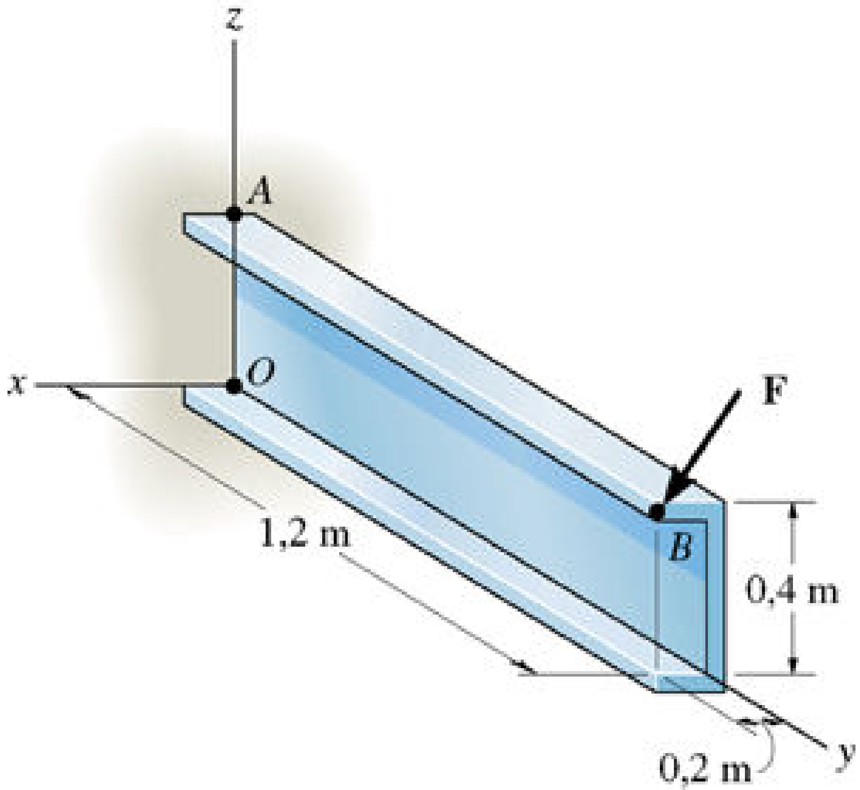
Exercícios Propostos

- 2) O bastão curvado se estende no plano *x-y* e tem uma curvatura de 3m. sabendo que a força *F* é igual a 80N, determine o momento dessa força em relação ao ponto o.



Exercícios Propostos

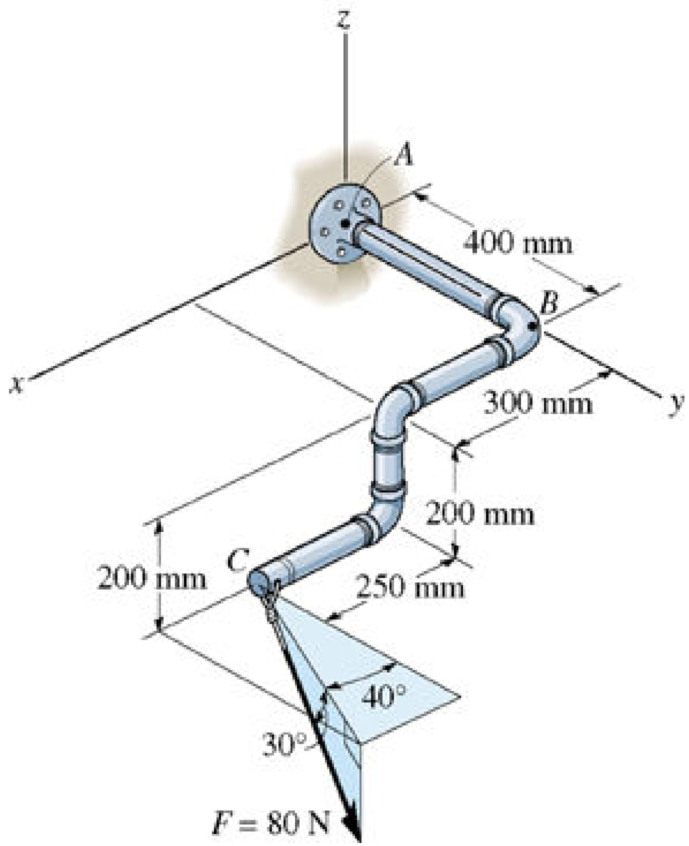
- 3) A força $\vec{F} = (600\vec{i} + 300\vec{j} - 600\vec{k})$ N, atua na extremidade da viga. Determine o momento dessa força em relação ao ponto *A*.



Exercícios Propostos

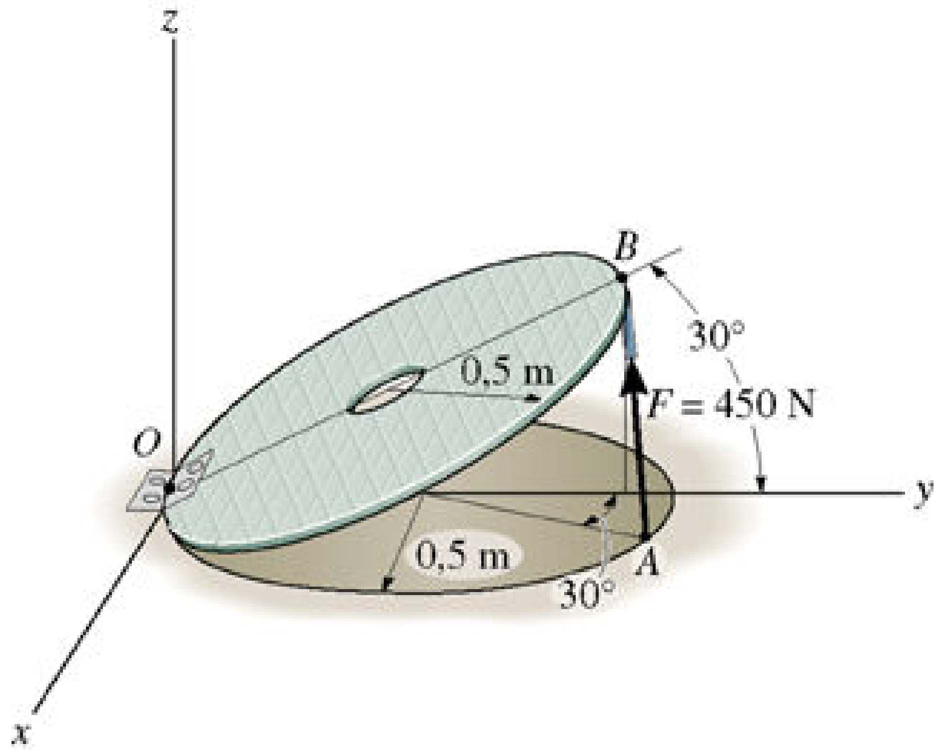
- 4) A estrutura mostrada na figura está sujeita a uma força de 80N.

  Determine o momento dessa força em relação ao ponto *A*.



Exercícios Propostos

- 5) A escora *AB* de uma comporta de 1m de diâmetro exerce uma força de 450N no ponto *B*. Determine o momento dessa força em relação ao ponto *O*.



Próxima Aula

- Momento em Relação a um Eixo Específico.
- Momento de um Binário.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 12 – Momento em Relação a um Eixo Específico e Momento de um Binário

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

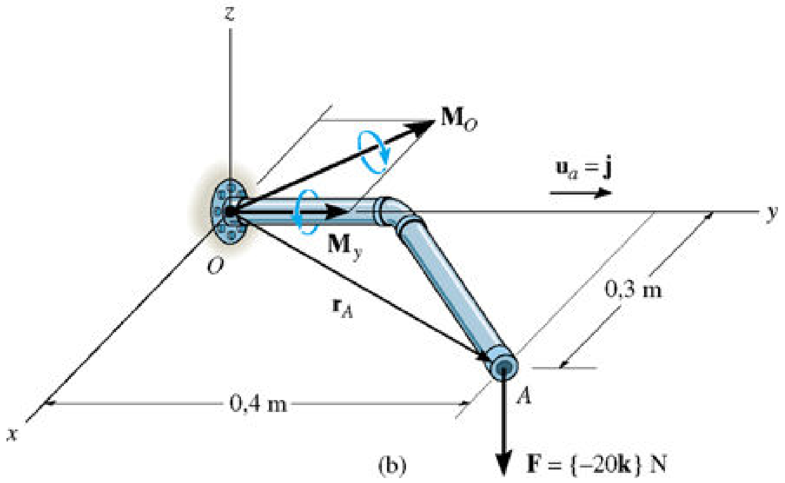
Tópicos Abordados Nesta Aula

- Momento em Relação a um Eixo Específico.
- Momento de um Binário.

Momento em Relação a um Eixo Específico

- Determina-se o momento da força em relação a um ponto do sistema e depois se realiza a projeção sobre o eixo que se deseja a partir do produto escalar.
- A solução contempla duas etapas, um produto vetorial seguido de um produto escalar.

Momento em Relação a um Eixo Específico – Formulação Matemática



$$M_a = \vec{u}_a \bullet (\vec{r}_{OA} \times \vec{F})$$

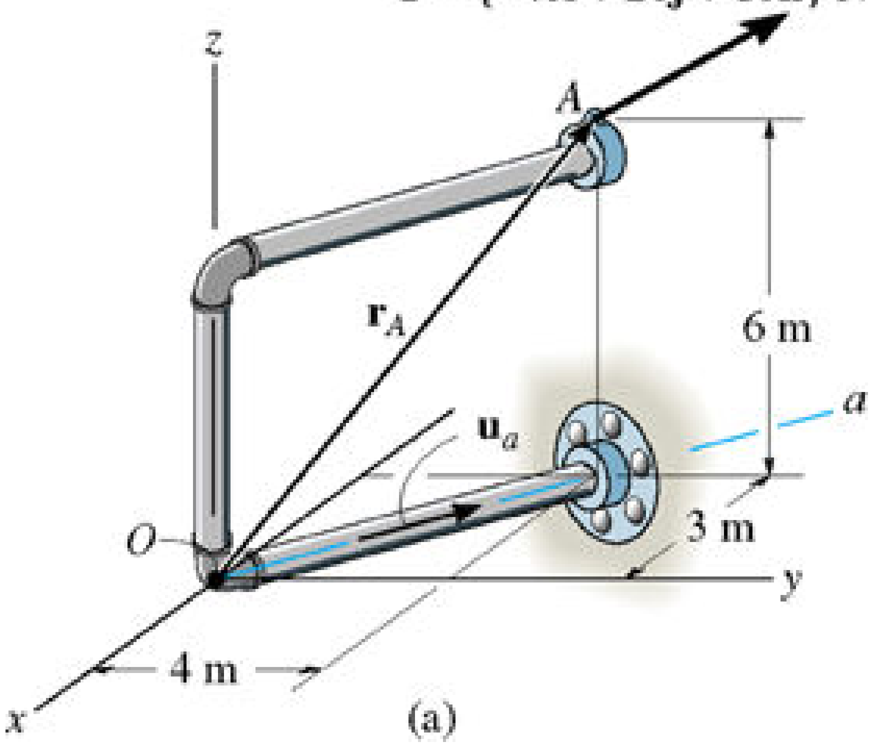
$$M_a = (u_a\vec{i} + u_a\vec{j} + u_a\vec{k}) \bullet \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_a = \begin{vmatrix} u_{ax} & u_{ay} & u_{az} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Calcular o Determinante

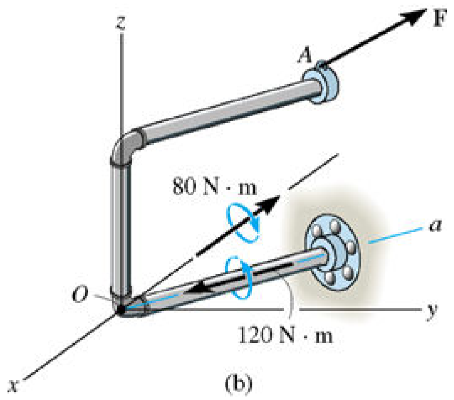
Exercício 1

- 1) A força ***F*** atua no ponto A mostrado na figura. Determine os momentos dessa força em relação ao eixo *x*.



(a)

Solução do Exercício 1



Vetor Força:

$$\vec{F} = (-40\vec{i} + 20\vec{j} + 10\vec{k})\text{N}$$

Vetor Posição:

$$\vec{r}_{OA} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} \text{ m}$$

Vetor Unitário:

$$\vec{u}_x = \vec{i}$$

Momento em Relação ao Eixo *x*:

$$M_x = \vec{u}_x \bullet (\vec{r}_{OA} \times \vec{F})$$

$$M_x = \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow M_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow M_x = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \\ -40 & 20 & 10 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ -40 & 20 \end{matrix}$$

Solução do Determinante:

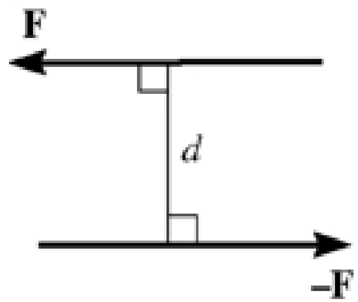
$$M_x = [-(-40 \cdot 4 \cdot 0) - (20 \cdot 6 \cdot 1) - (10 \cdot -3 \cdot 0)] + [(1 \cdot 4 \cdot 10) + (0 \cdot 6 \cdot -40) + (0 \cdot 3 \cdot -20)]$$

$$M_x = [0 - 120 - 0] + [-40 - 0 - 0] \Rightarrow M_x = [-120 + 40] \Rightarrow M_x = -80\text{Nm}$$

Momento de um Binário

- Um binário é definido como duas forças paralelas de mesma intensidade, sentidos opostos e separadas por um distância *d*.

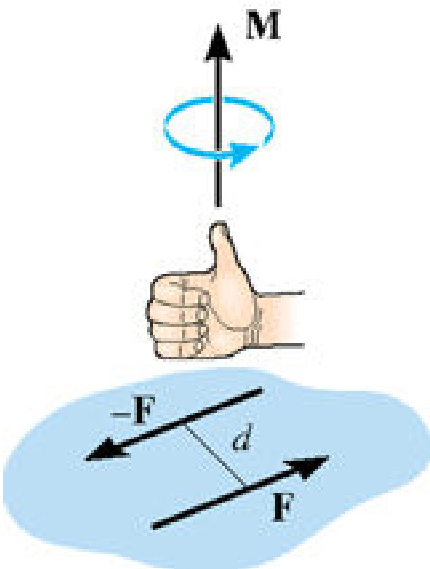
- O efeito de um binário é proporcionar rotação ou tendência de rotação em um determinado sentido.



Formulação Matemática de um Binário

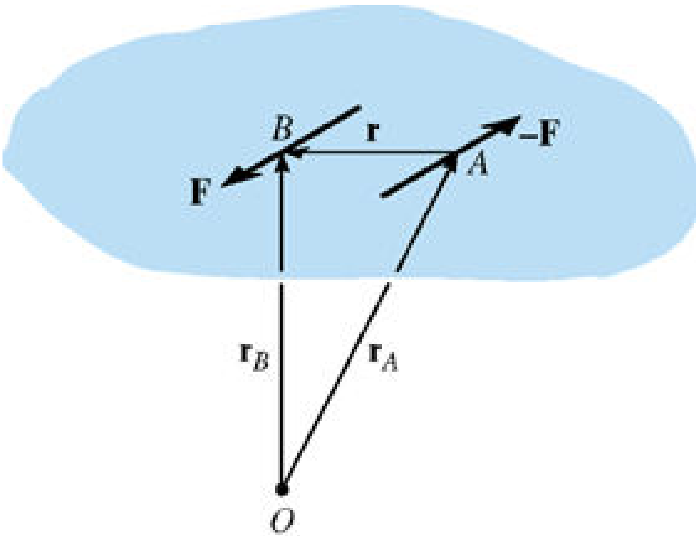
Formulação Escalar:

$$M = F \cdot d$$



Formulação Vetorial:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Binários Equivalentes

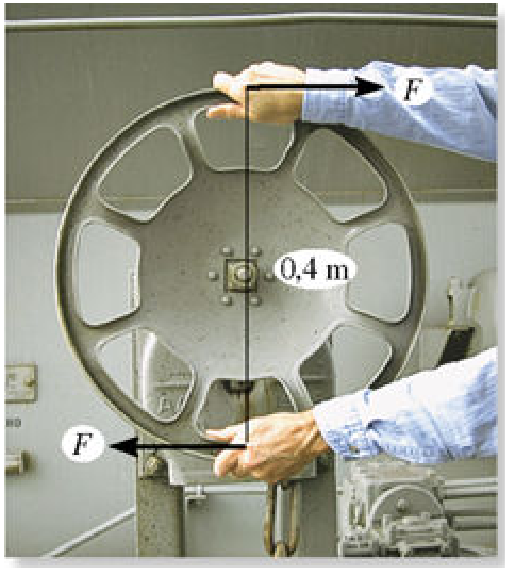
- Dois binários são ditos equivalentes se produzem o mesmo momento.
- O momento resultante de dois binários é obtido pela soma dos binários.

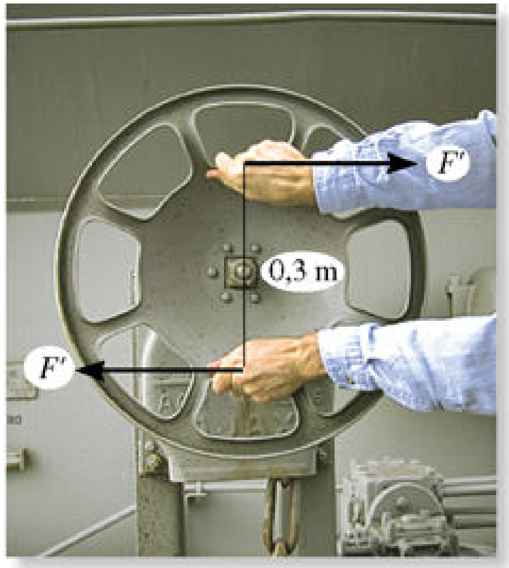
Notação Escalar:

$$M_R = \sum (F \cdot d)$$

Notação Vetorial:

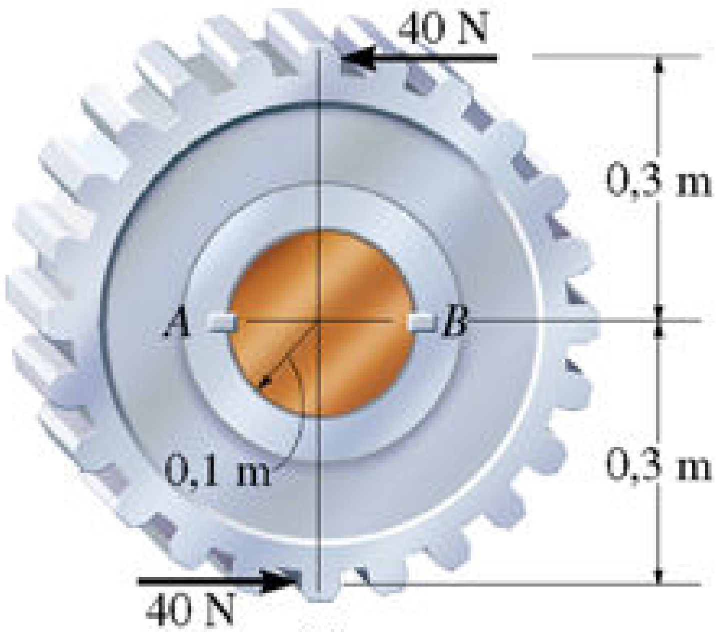
$$\vec{M}_R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$





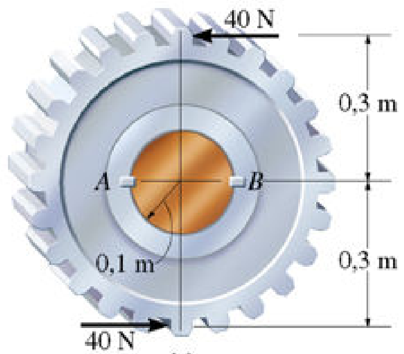
Exercício 2

- 2) Um binário atua nos dentes da engrenagem mostrada na figura. Substitua esse binário por um equivalente, composto por um par de forças que atuam nos pontos *A* e *B*.



(a)

Solução do Exercício 2



(a)

Momento do Binário:

$$M = F \cdot d$$

$$M = 40 \cdot 0{,}6$$

$$M = 24\text{Nm}$$

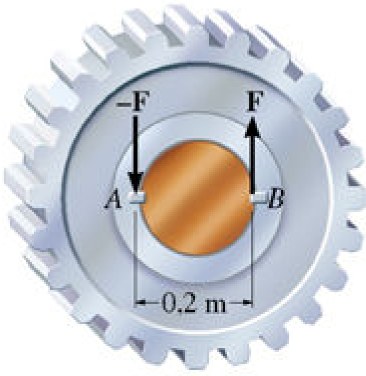
(b)

Cálculo das Forças:

$$F = \frac{M}{d_{AB}}$$

$$F = \frac{24}{0{,}2}$$

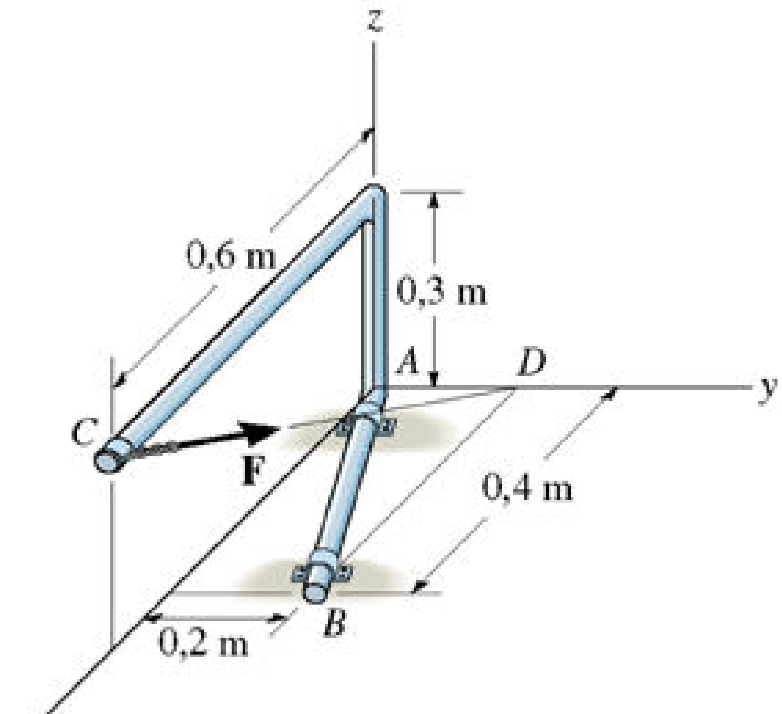
$$F = 120\,\text{N}$$



(c)

Exercícios Propostos

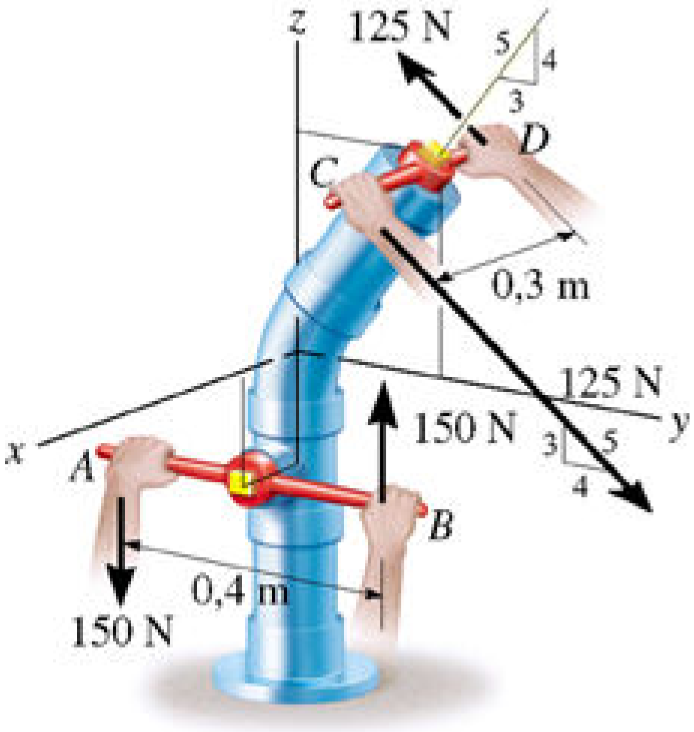
- 1) A barra mostrada na figura é suportada por dois mancais em *A* e *B*. Determine o momento M_{AB} produzido por $\vec{F} = (-600\vec{i} + 200\vec{j} - 300\vec{k})$ N que tende a girar a barra em torno do eixo *AB*.



(a)

Exercícios Propostos

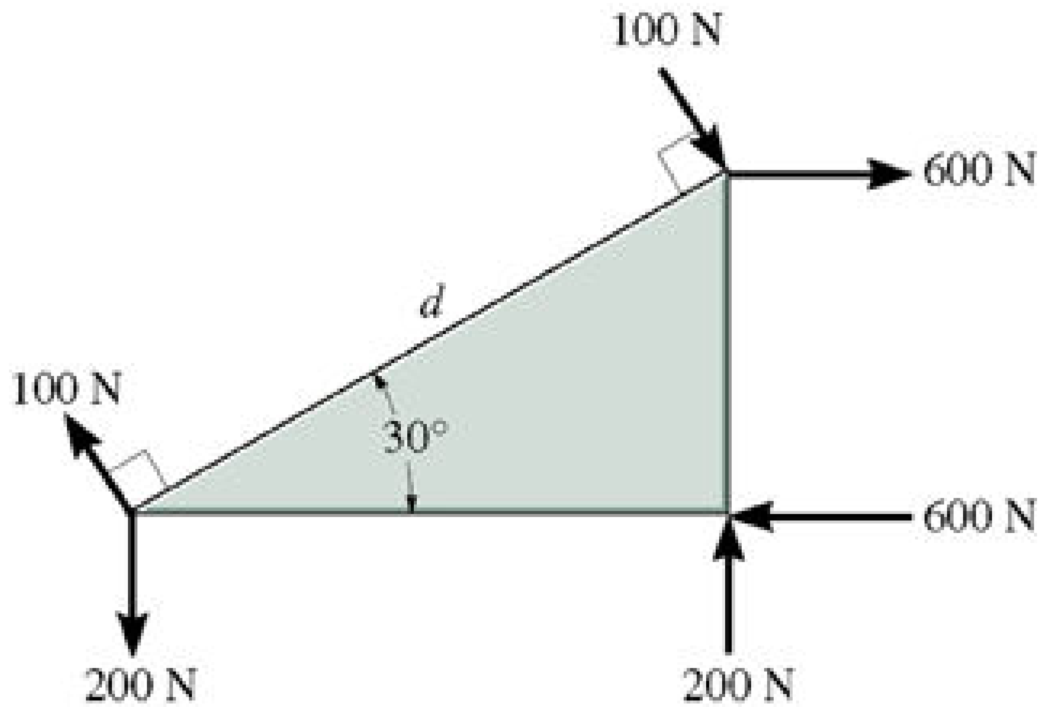
- 2) Substitua os dois binários que atuam na estrutura por um único binário resultante.



(a)

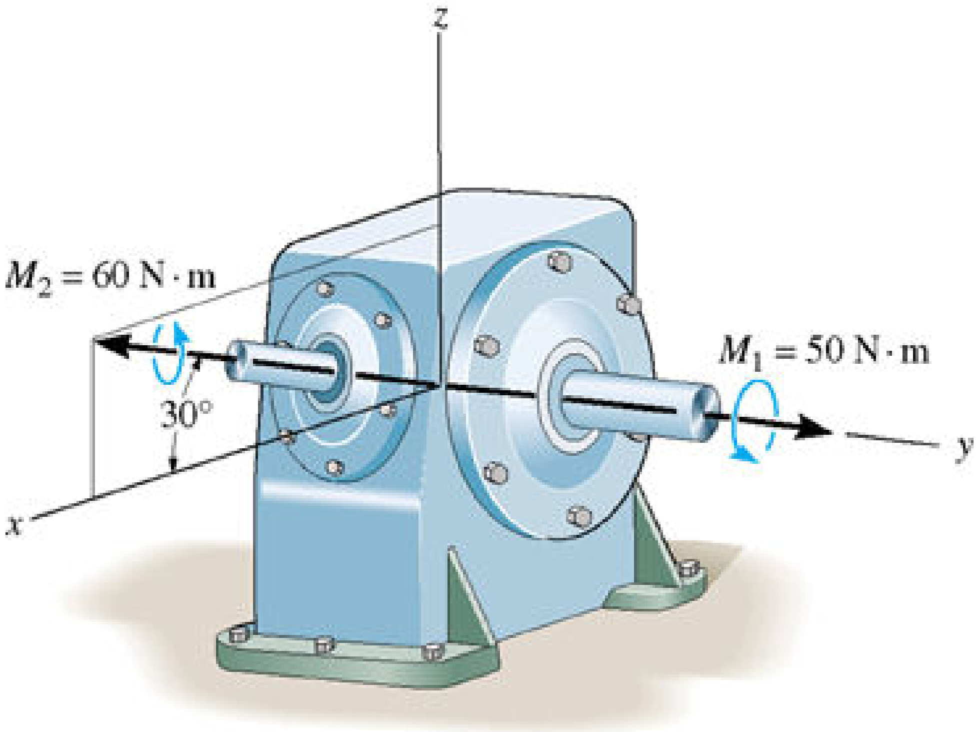
Exercícios Propostos

- 3) As extremidades da chapa triangular estão sujeitas a três binários. Determine a dimensão *d* da chapa de modo que o momento de binário resultante seja 350Nm no sentido horário.



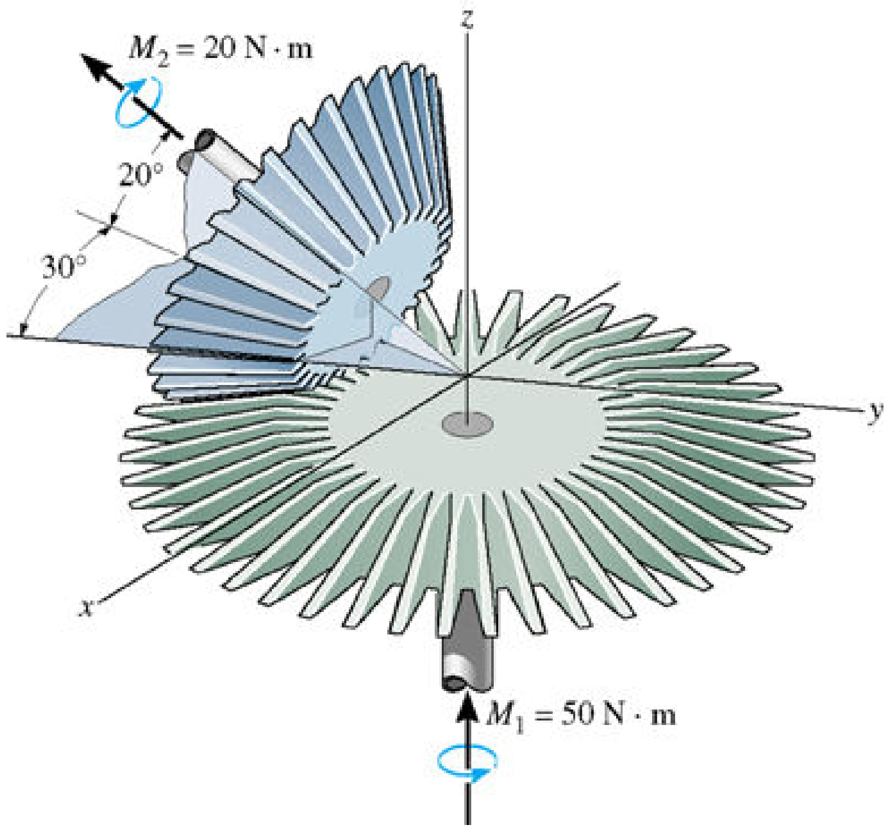
Exercícios Propostos

- 4) O redutor de velocidade está sujeito ao binário mostrado na figura. Determine o momento de binário resultante especificando sua intensidade e os ângulos coordenados diretores.



Exercícios Propostos

- 5) As engrenagens estão sujeitas aos momentos de binário mostrados na figura. Determine a intensidade do momento de binário resultante e especifique seus ângulos coordenados diretores.



Próxima Aula

- Redução de um Sistema de Cargas Concentradas.
- Sistemas Equivalentes de Forças e Momentos.

Mecânica Técnica

Aula 13 – Sistemas Equivalentes de Cargas Concentradas

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Redução de um Sistema de Cargas Concentradas.
- Sistemas Equivalentes de Forças e Momentos.

Sistema Equivalente

- Representa um sistema no qual a força e o momento resultantes produzam na estrutura o mesmo efeito que o carregamento original aplicado.

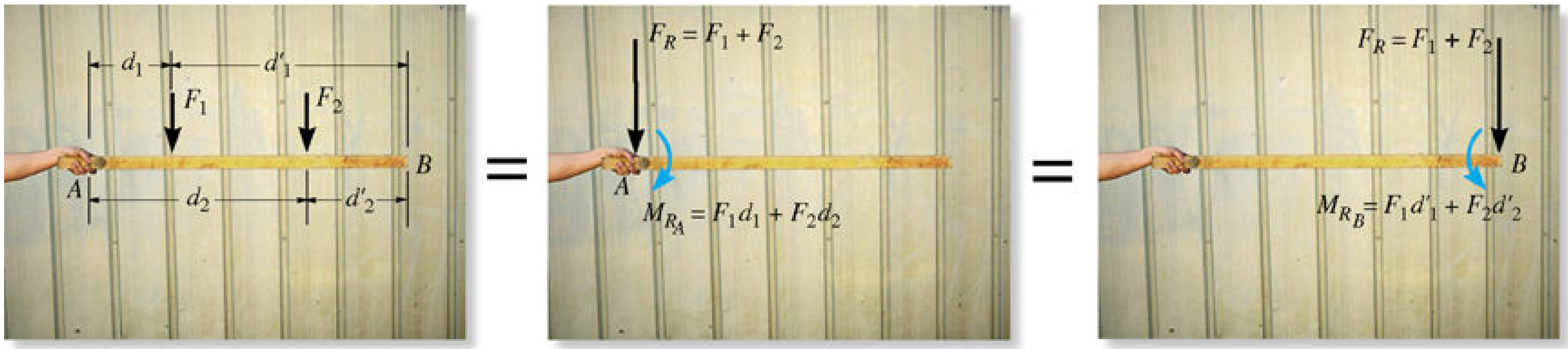
Redução de um Sistema de Forças Coplanares

- Converter o sistema de forças aplicadas na estrutura em uma única força resultante e um momento atuantes em um determinado ponto.

$$F_{Rx} = \sum F_x$$

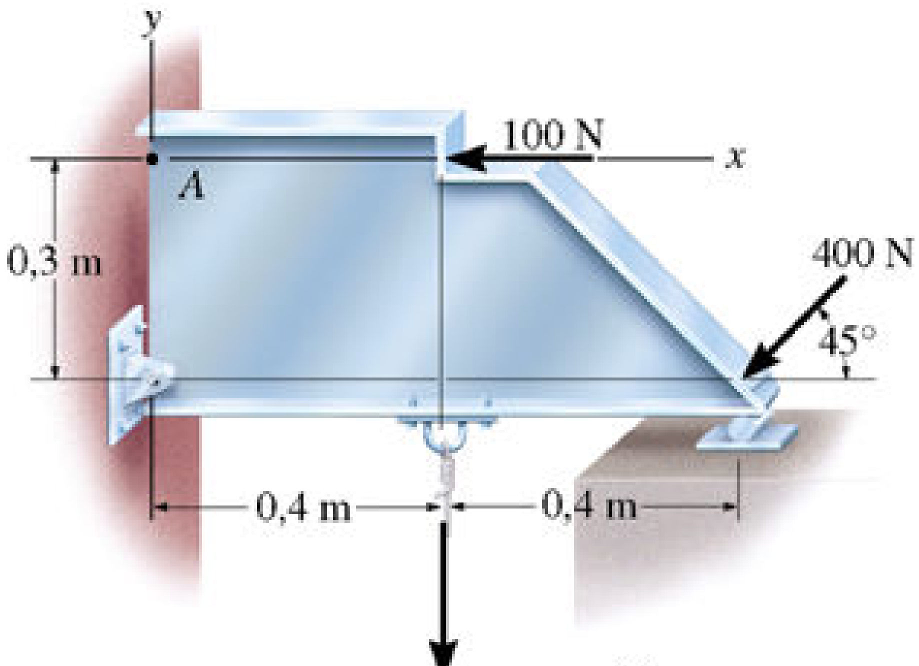
$$F_{Ry} = \sum F_y$$

$$M_R = \sum M$$



Exercício 1

- 1) Substitua as cargas atuantes na viga por uma única força resultante e um momento atuante no ponto *A*.



(a)

Solução do Exercício 1

Cálculo da força resultante:

No eixo *x*:

$$F_{Rx} = \sum F_x \rightarrow F_{Rx} = -100 - 400 \cdot \cos 45°$$

$$F_{Rx} = -382{,}8\text{N} \rightarrow F_{Rx} = 382{,}8\text{N} \leftarrow$$

No eixo *y*:

$$F_{Ry} = \sum F_y \rightarrow F_{Ry} = -600 - 400 \cdot sen 45°$$

$$F_{Ry} = -882{,}8\text{N} \rightarrow F_{Ry} = 882{,}8\text{N} \downarrow$$

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2}$$

$$F_R = \sqrt{(382{,}8)^2 + (882{,}8)^2}$$

$$F_R = 962\text{N}$$

Direção da força resultante:

$$\theta = arctg\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right)$$

$$\theta = arctg\left(\frac{882{,}8}{382{,}8}\right)$$

$$\theta = 66{,}6°$$

Solução do Exercício 1

Momento resultante:

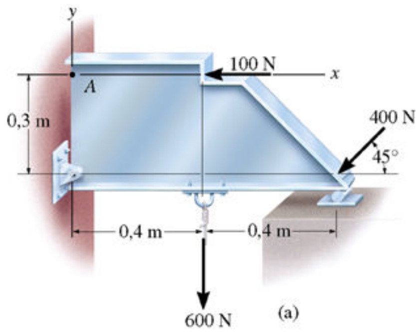
$$M_{RA} = \sum M_A$$

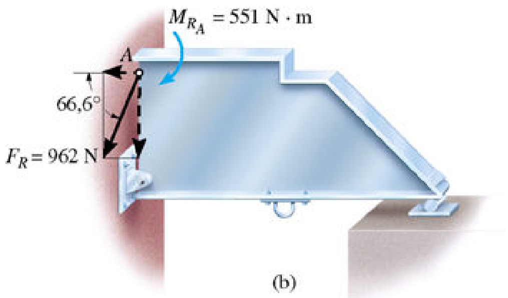
$$M_{RA} = 100 \cdot 0 - 600 \cdot 0{,}4 - (400 \cdot sen45°) \cdot 0{,}8 - (400 \cdot \cos 45°) \cdot 0{,}3$$

$$M_{RA} = -551\text{Nm}$$

$$M_{RA} = 551\text{Nm}$$

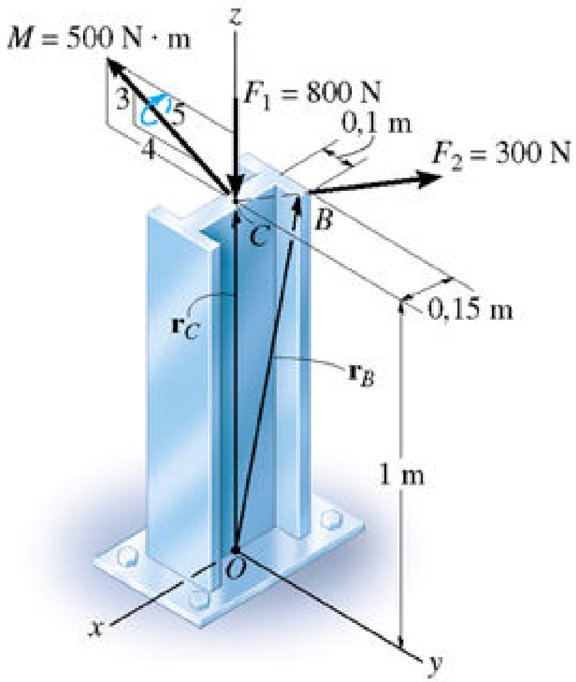
Sistema equivalente:





Exercício 2

- 2) A estrutura mostrada na figura está submetida a um momento ***M*** e as forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$. Substitua esse sistema por uma única força e um momento equivalente atuante no ponto *O*.



(a)

Solução do Exercício 2

Determinação dos vetores de Força e Momento:

Força 1

$\vec{F}_1 = -800\vec{k}$ N

Força 2

$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{u}_{CB}$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \left(\frac{\vec{r}_{CB}}{r_{CB}}\right)$$

Vetor Posição

$\vec{r}_{CB} = -0{,}15\vec{i} + 0{,}1\vec{j}$ m

Módulo do Vetor Posição

$$r_{CB} = \sqrt{0{,}15^2 + 0{,}1^2}$$

$r_{CB} = 0{,}180$ m

$$\vec{F}_2 = 300 \cdot \left(\frac{-0{,}15\vec{i} + 0{,}1\vec{j}}{0{,}180}\right)$$

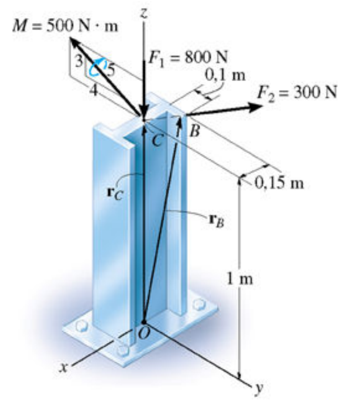
$$\vec{F}_2 = 300 \cdot \left(-0{,}833\vec{i} + 0{,}555\vec{j}\right)$$

$\vec{F}_2 = -249{,}9\vec{i} + 166{,}5\,j$ N

Momento

$$\vec{M} = -500 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)\vec{j} + 500 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\vec{k}$$

$\vec{M} = -400\vec{j} + 300\vec{k}$ Nm



(a)

Solução do Exercício 2

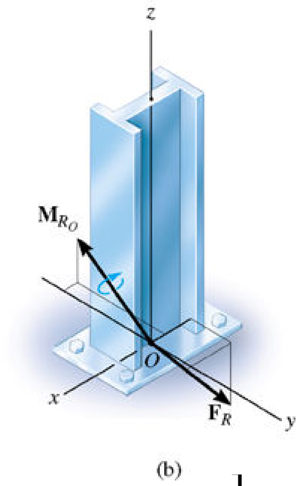
Determinação da Força Resultante:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_R = -800\vec{k} - 249{,}9\vec{i} + 166{,}5\vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_R = -249{,}9\vec{i} + 166{,}5\vec{j} - 800\vec{k} \text{ N}$$

Determinação do Momento Resultante no Ponto *O*:

$$\vec{M}_{RO} = \sum \vec{M} \qquad \vec{M}_{RO} = \vec{M} + (\vec{r}_{OC} \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_{OB} \times \vec{F}_2)$$



Vetor Posição:

$$\vec{r}_{OC} = 1\vec{k} \text{ m} \qquad \vec{r}_{OB} = -0{,}15\vec{i} + 0{,}1\vec{j} + 1\vec{k} \text{ m}$$

$$\vec{M}_{RO} = (-400\vec{j} + 300\vec{k}) + \left[(1\vec{k}) \times (-800\vec{k})\right] + \left[(-0{,}15\vec{i} + 0{,}1\vec{j} + 1\vec{k}) \times (-249{,}9\vec{i} + 166{,}5\vec{j})\right]$$

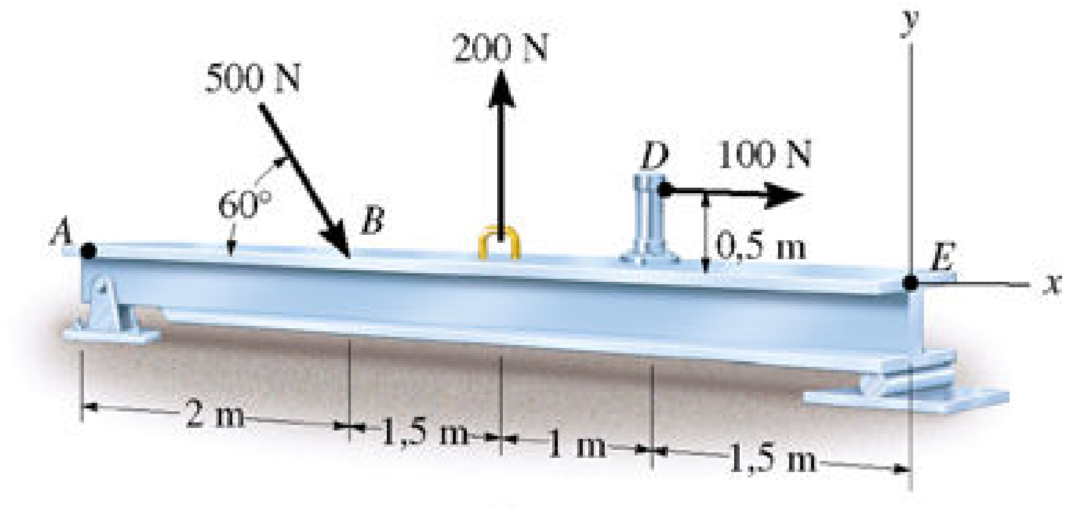
$$\vec{M}_{RO} = (-400\vec{j} + 300\vec{k}) + 0 + (-24{,}99\vec{k} + 24{,}99\vec{k} - 249{,}9\vec{j} - 166{,}5\vec{i})$$

$$\vec{M}_{RO} = (-400\vec{j} + 300\vec{k} - 249{,}9\vec{j} - 166{,}5\vec{i})$$

$$\vec{M}_{RO} = (-166{,}5\vec{i} - 649{,}9\vec{j} + 300\vec{k}) \text{ Nm}$$

Exercícios Propostos

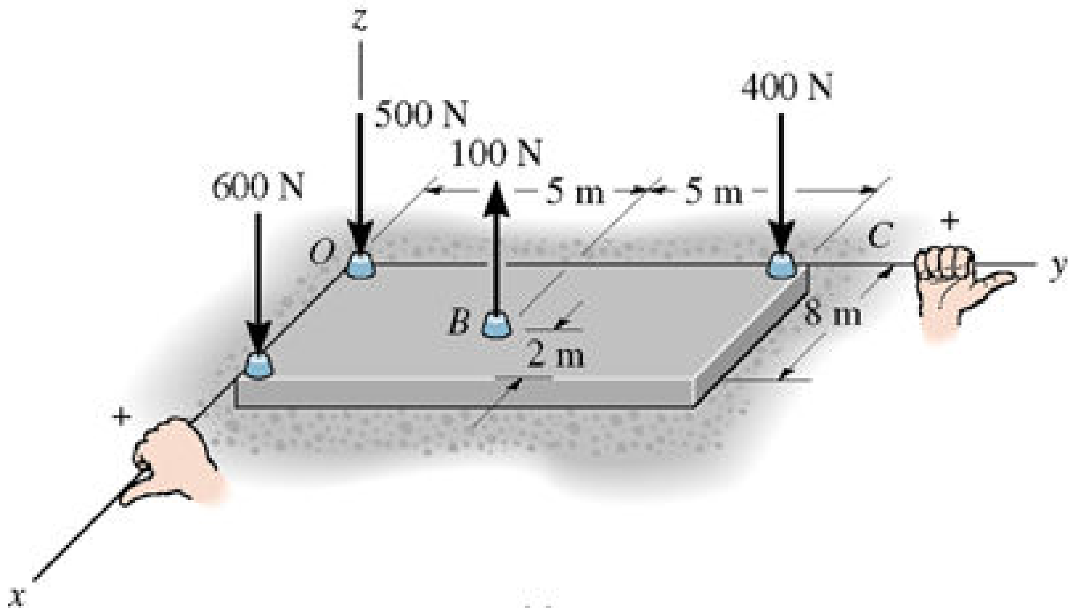
- 1) A viga está submetida a um sistema de forças coplanares. Determine a intensidade o sentido e a localização de uma força equivalente ao sistema de forças em relação ao ponto *E*.



(a)

Exercícios Propostos

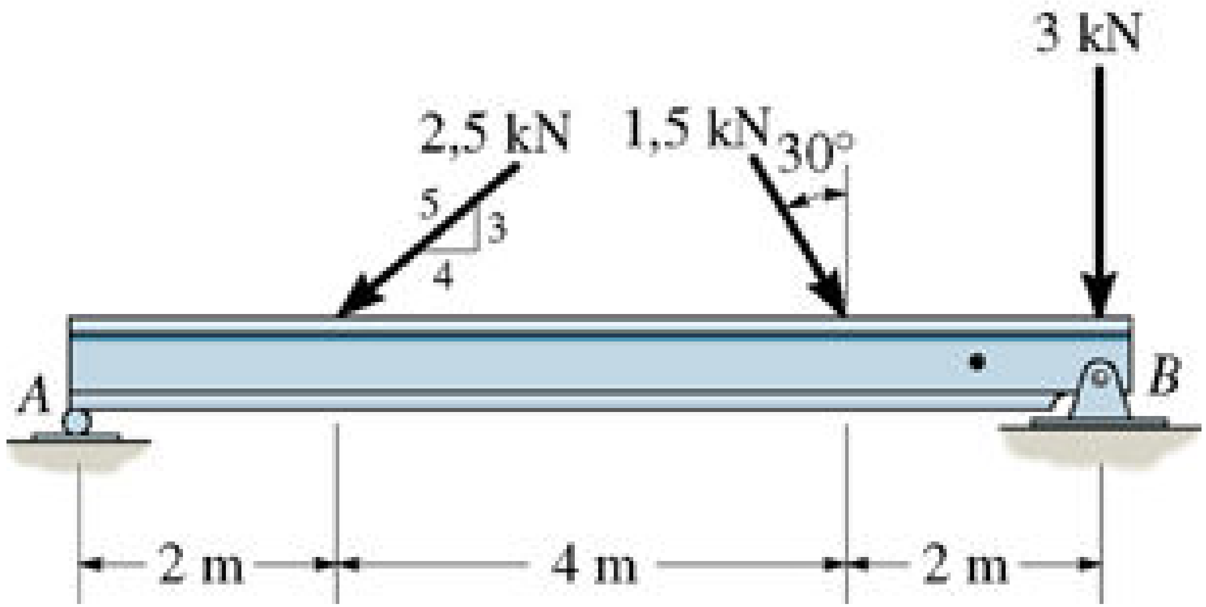
- 2) A placa mostrada na figura está submetida a quatro forças. Determine a força resultante equivalente e especifique sua localização (*x*, *y*) sobre a placa.



(a)

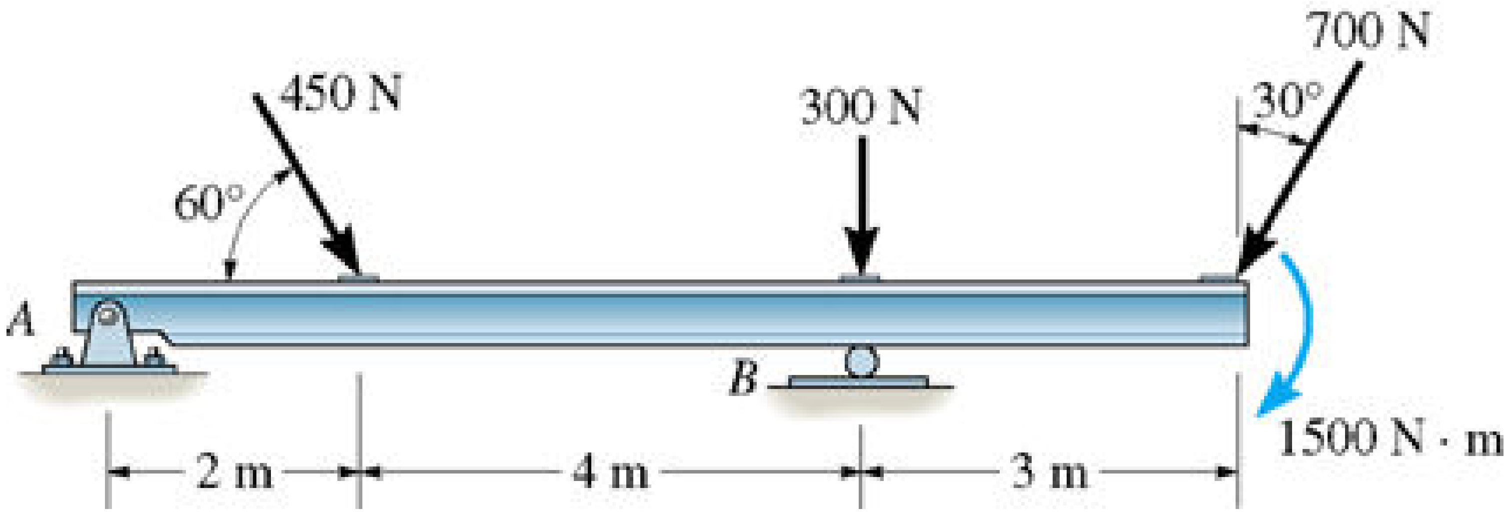
Exercícios Propostos

- 3) Substitua as cargas atuantes na viga por uma única força resultante e um momento equivalentes no ponto *A*.



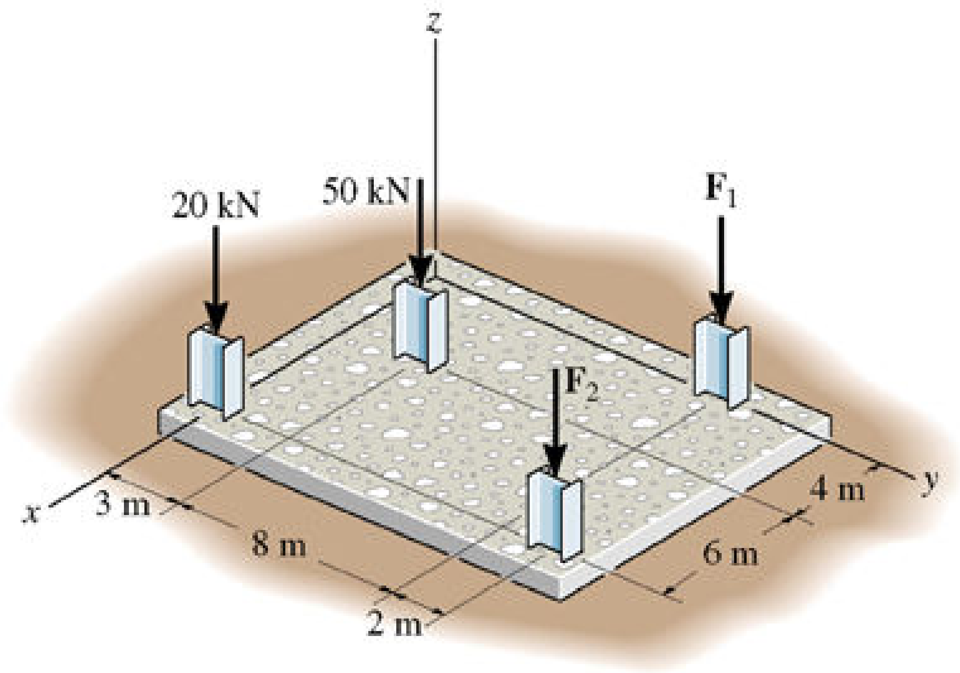
Exercícios Propostos

- 4) Substitua as cargas atuantes na viga por uma única força resultante. Especifique onde a força atua, tomando como referência o ponto *B*.



Exercícios Propostos

- 5) A laje da figura está submetida a quatro pilares com cargas. Determine a força resultante equivalente e especifique sua localização (*x*, *y*) sobre a laje. Considere que F_1 = 30kN e F_2 = 40kN.



Próxima Aula

- Sistemas Equivalentes de Cargas Distribuídas.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 14 – Sistemas Equivalentes de Cargas Distribuídas

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

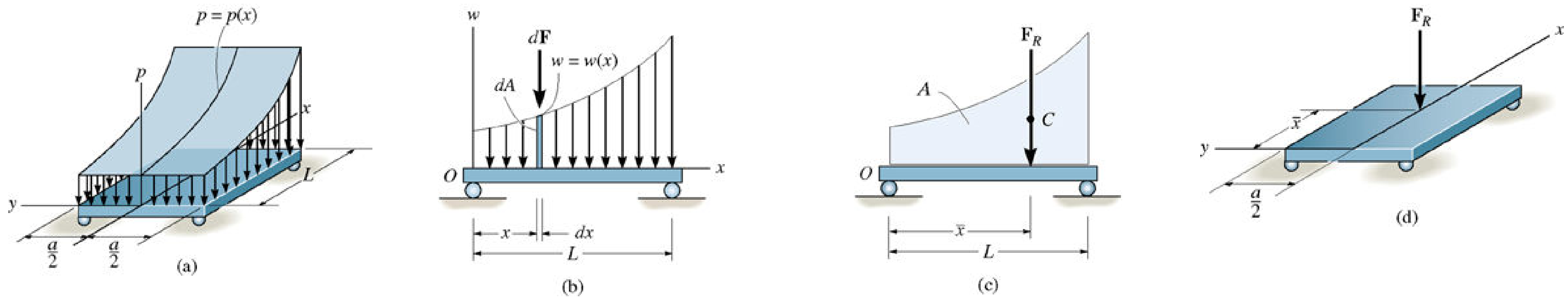
Tópicos Abordados Nesta Aula

- Sistemas Equivalentes de Cargas Distribuídas.

Sistema de Cargas Distribuidas

- A intensidade da força resultante é equivalente a soma de todas as forças atuantes no sistema e em muitos casos deve ser calculada por integração, uma vez que existem infinitas forças atuando sobre o sistema.
- A força resultante é igual a área total sob o diagrama de carga.

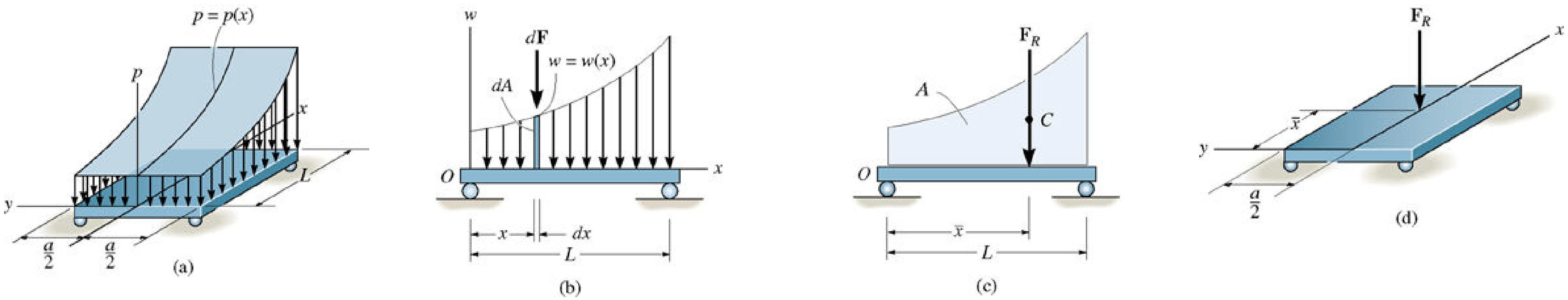
$$F_R = \int_L w(x) \cdot dx = \int_A dA = A$$



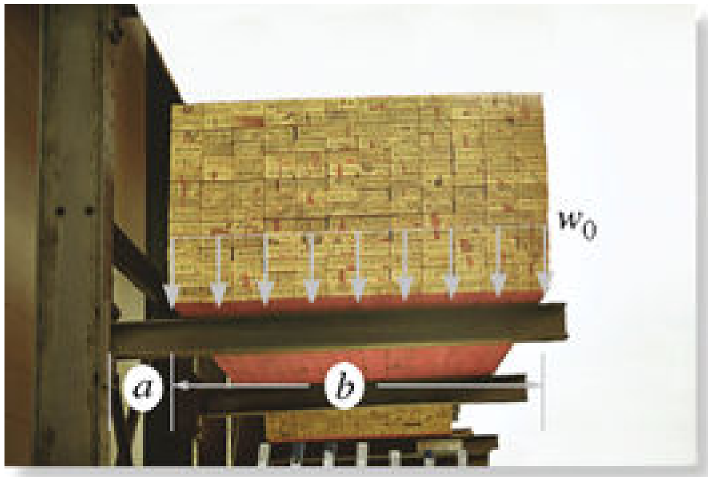
Localização da Força Resultante

- A localização da linha de ação da força resultante em relação ao eixo *x* pode ser determinada pela equação de momentos da força resultante e da distribuição de forças em relação ao ponto *O*.
- A força resultante tem uma linha de ação que passa pelo centróide da área definida pelo diagrama de carregamento.

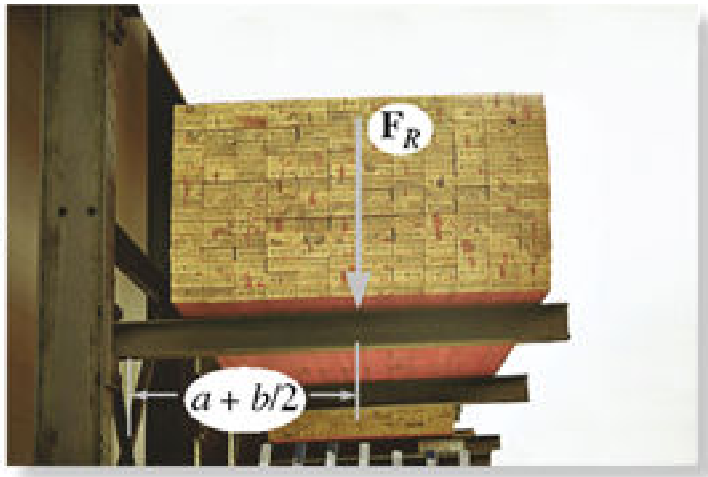
$$\bar{x} = \frac{\int_L x \cdot w(x) \cdot dx}{\int_L w(x) \cdot dx} = \frac{\int_A x \cdot dA}{\int_A dA}$$



Exemplo de Carregamento Distribuído

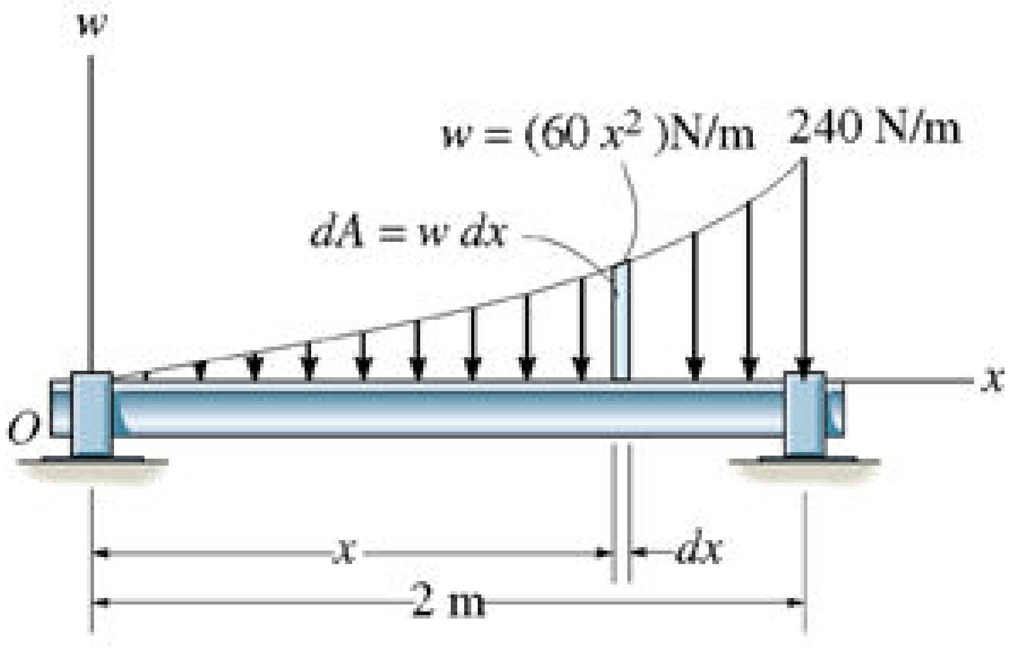


=



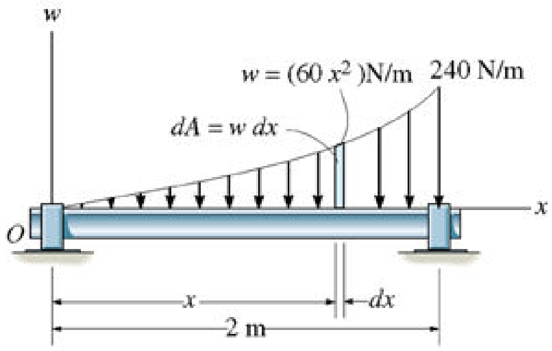
Exercício 1

- 1) Determine a intensidade e a localização da força resultante equivalente que atua no eixo mostrado na figura.

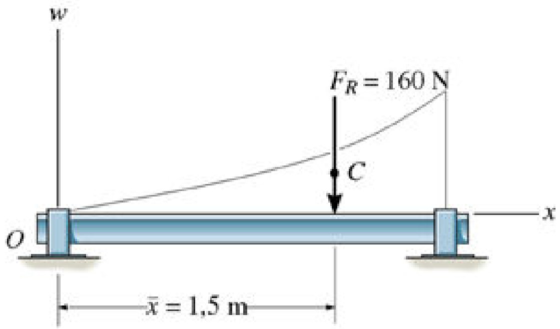


(a)

Solução do Exercício 1



(a)



(b)

Determinação da força resultante:

$$F_R = \sum F$$

$$F_R = \int_A dA \quad \rightarrow \quad F_R = \int_0^2 (60 \cdot x^2)dx$$

$$F_R = 60 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \quad \rightarrow \quad F_R = 60 \cdot \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$F_R = 60 \cdot \frac{8}{3}$$

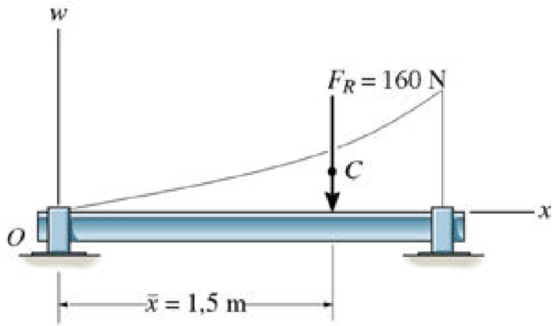
$$F_R = 160 \text{ N}$$

Solução do Exercício 1

Localização da força resultante:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x \cdot dA}{\int_A dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 x \cdot (60 \cdot x^2)dx}{160} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_0^2 (60 \cdot x^3)dx}{160}$$



(b)

$$\bar{x} = \frac{60 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2}{160}$$

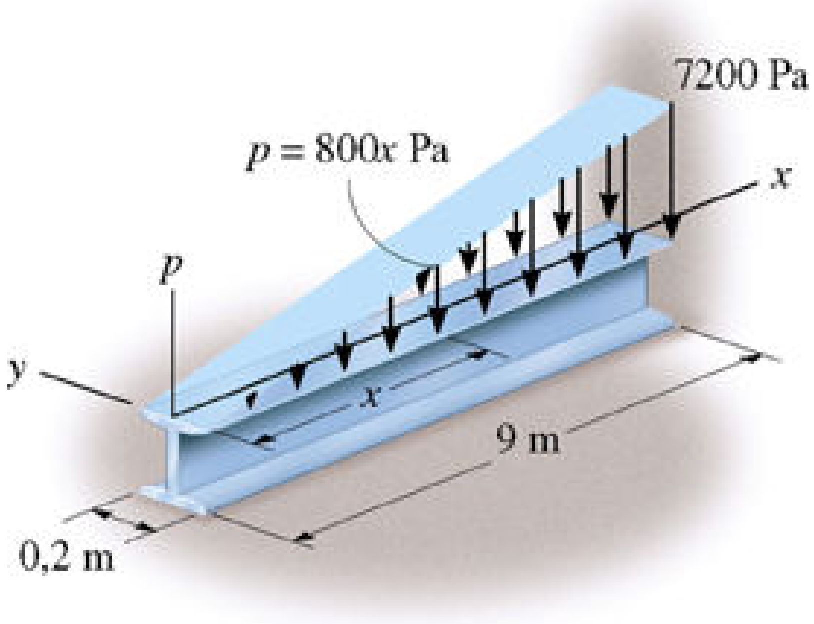
$$\bar{x} = \frac{60 \cdot \left[\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right]}{160}$$

$$\bar{x} = \frac{60 \cdot 16}{160 \cdot 4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{60 \cdot 4}{160}$$

$$\bar{x} = 1{,}5\text{m}$$

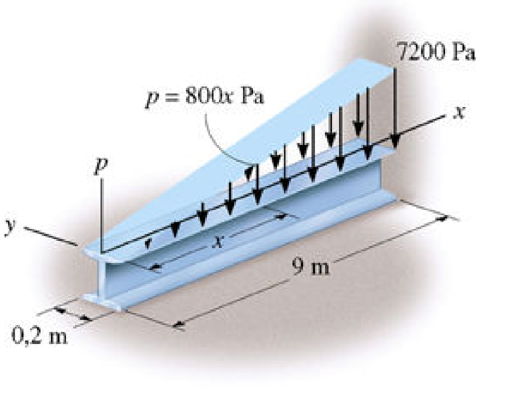
Exercício 2

- 2) Um carregamento distribuído com p = 800x Pa atua no topo de uma superfície de uma viga como mostra a figura. Determine a intensidade e a localização da força resultante equivalente.

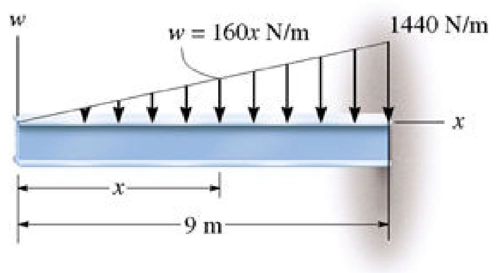


(a)

Solução do Exercício 2



(a)



(b)

Determinação da força resultante:

$$w = (160 \cdot x)$$

$$w = (800 \cdot x) \cdot 0{,}2$$

P/ x = 9m tem-se que w = 1440N/m

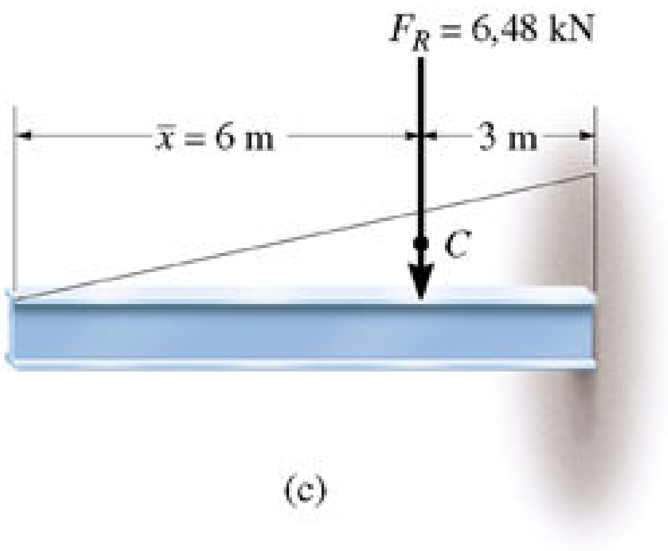
$$F_R = \int_A dA$$

$$F_R = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow F_R = \frac{9 \cdot 1440}{2}$$

$$F_R = 6480 \text{ N}$$

Solução do Exercício 2

Localização da força resultante:



(c)

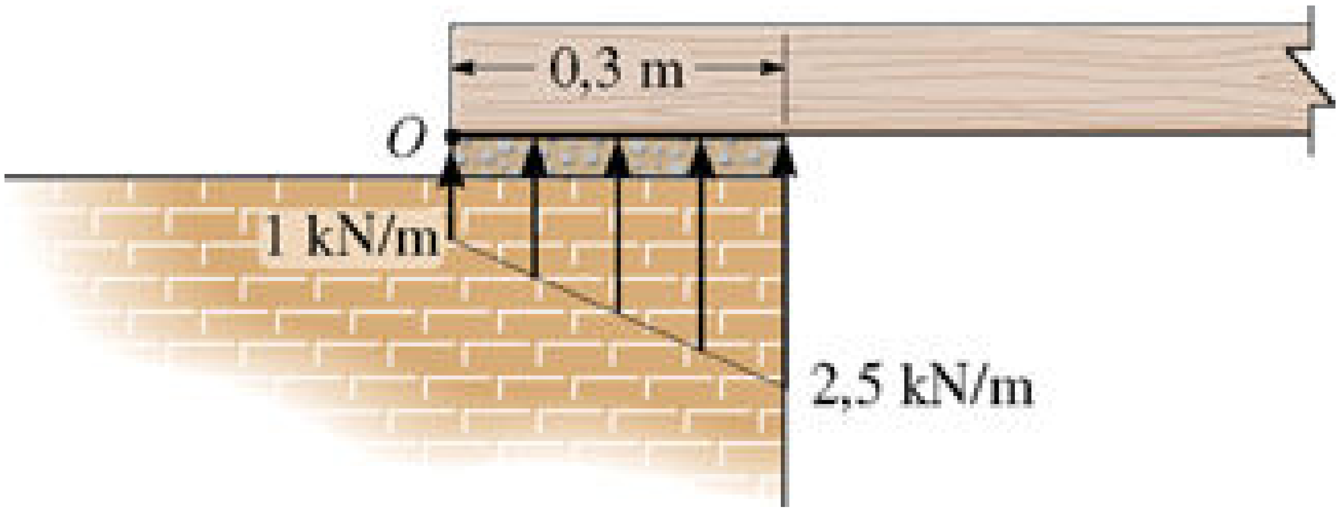
Pelo Centróide do triângulo:

$$\bar{x} = 9 - \left(\frac{1}{3} \cdot 9\right)$$

$$\bar{x} = 6 \text{ m}$$

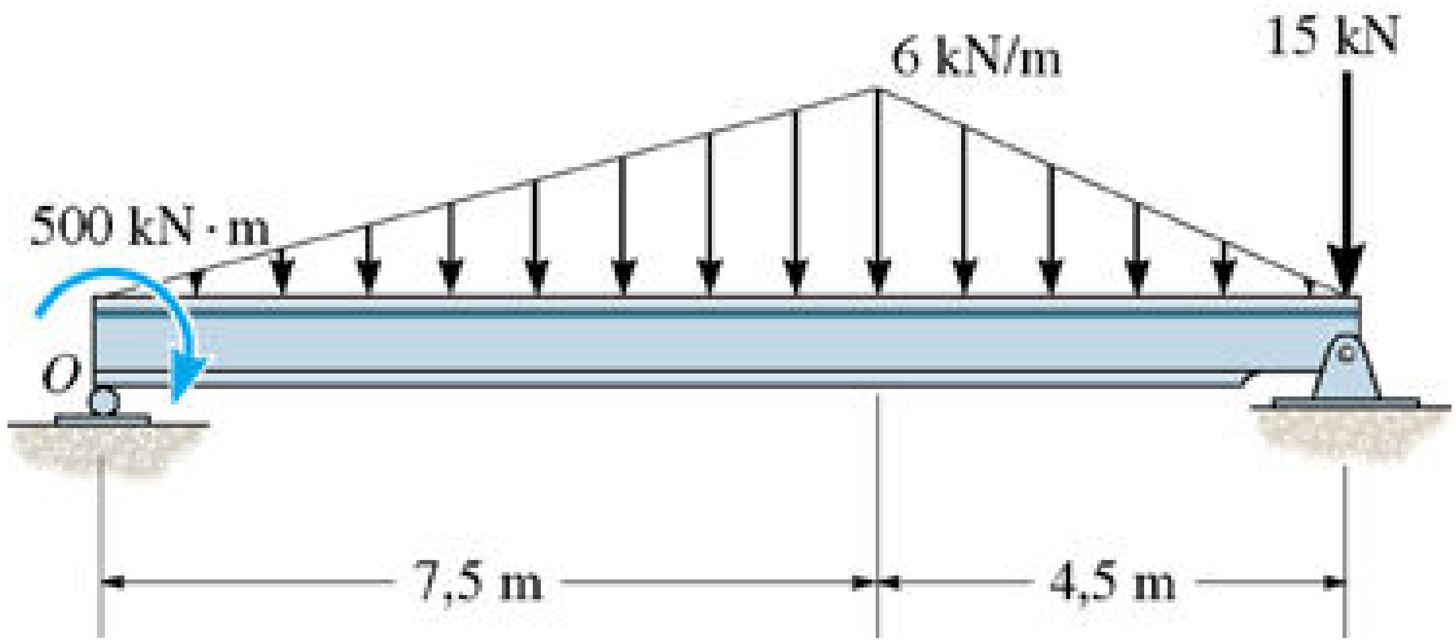
Exercícios Propostos

- 1) O suporte de alvenaria gera a distribuição de cargas atuando nas extremidades da viga. Simplifique essas cargas a uma única força resultante e especifique sua localização em relação ao ponto *O*.



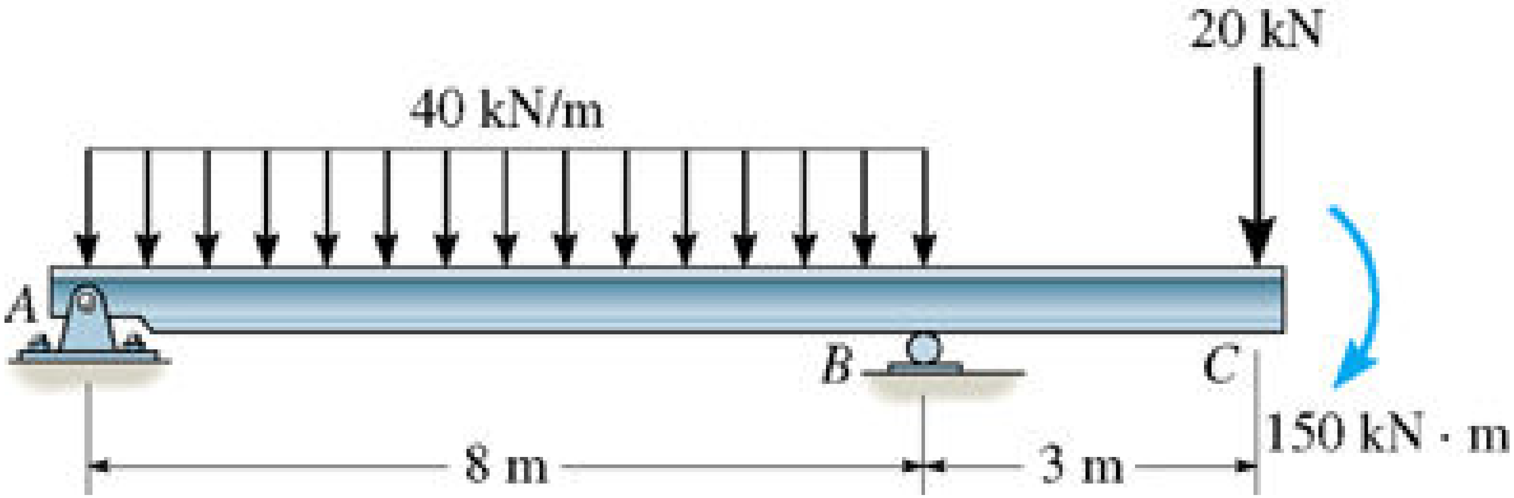
Exercícios Propostos

- 2) Substitua as carga atuantes por uma única força resultante e especifique sua localização sobre a viga em relação ao ponto *O*.



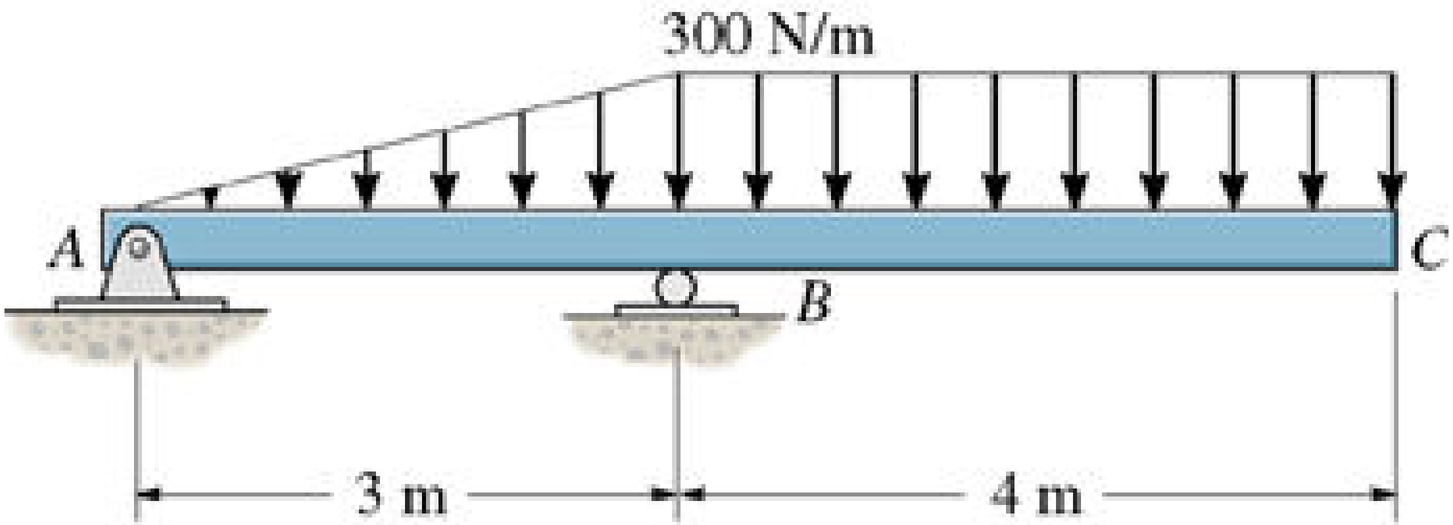
Exercícios Propostos

- 3) Substitua as carga atuantes por uma única força resultante e especifique sua localização sobre a viga em relação ao ponto *A*.



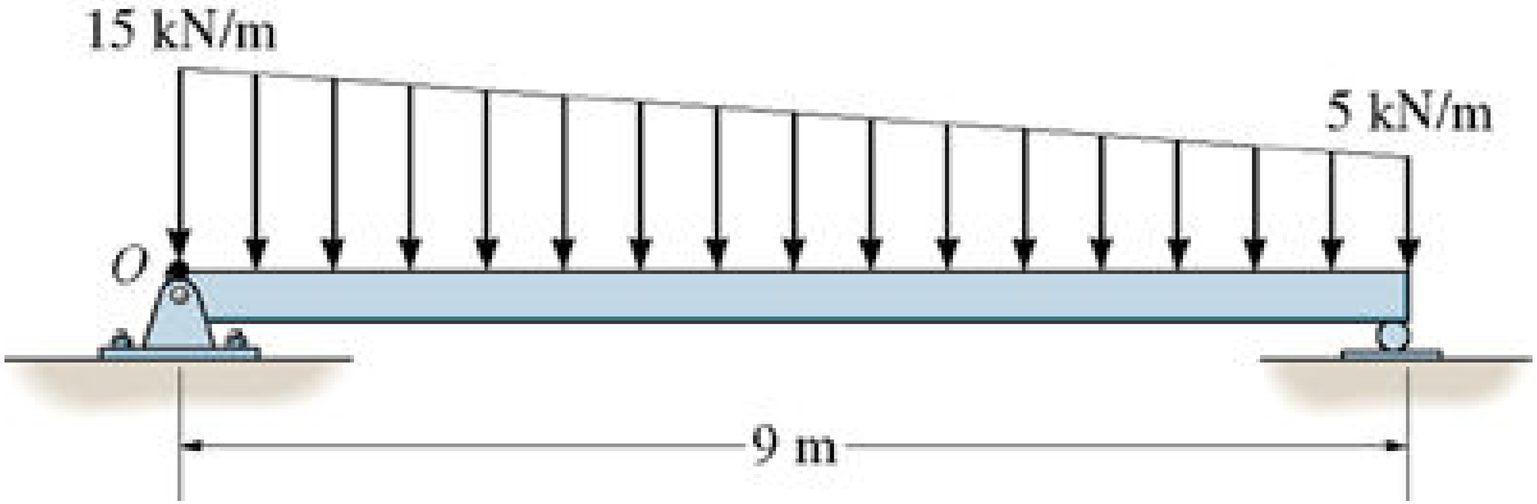
Exercícios Propostos

- 4) Substitua as carga atuantes por uma única força resultante e especifique sua localização sobre a viga em relação ao ponto *A*.



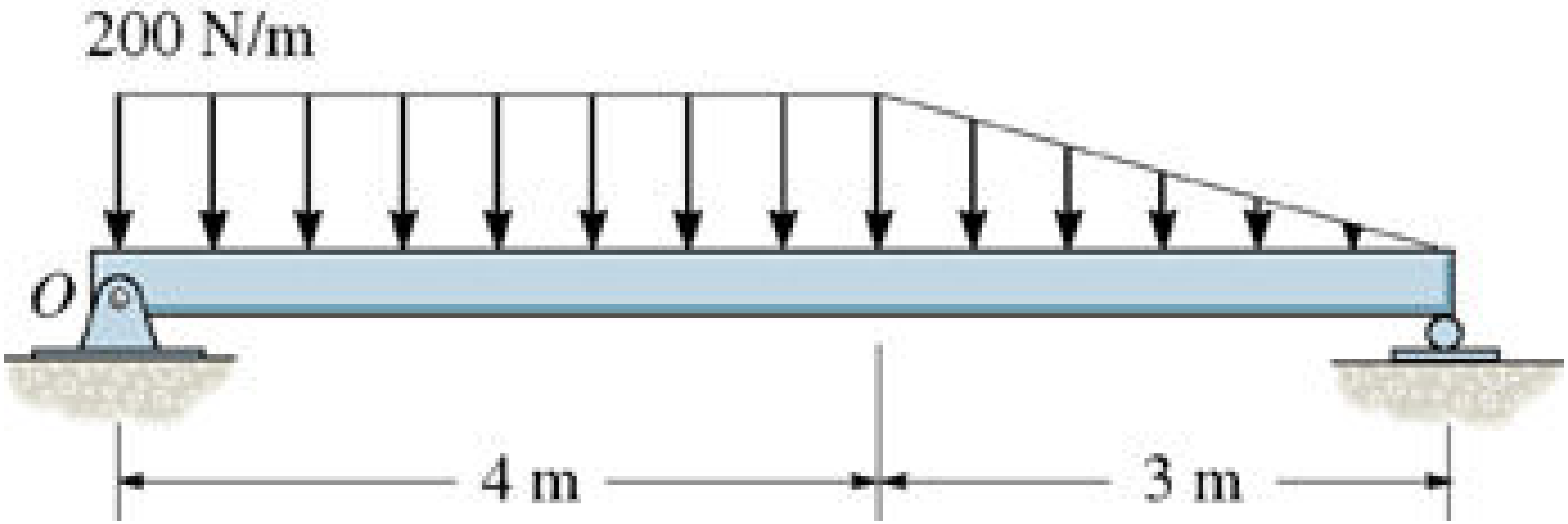
Exercícios Propostos

- 5) Substitua as carga atuantes por uma única força resultante e especifique sua localização sobre a viga em relação ao ponto *O*.



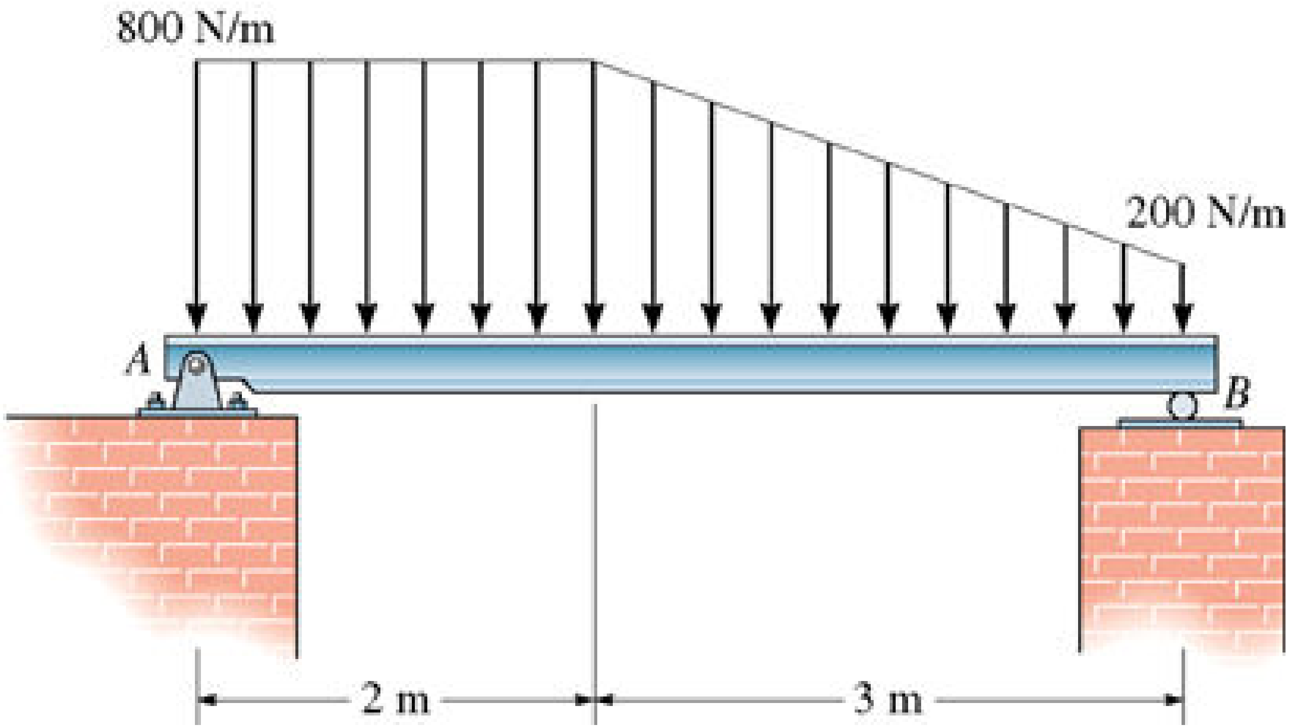
Exercícios Propostos

- 6) Substitua as carga atuantes por uma única força resultante e especifique sua localização sobre a viga em relação ao ponto *O*.



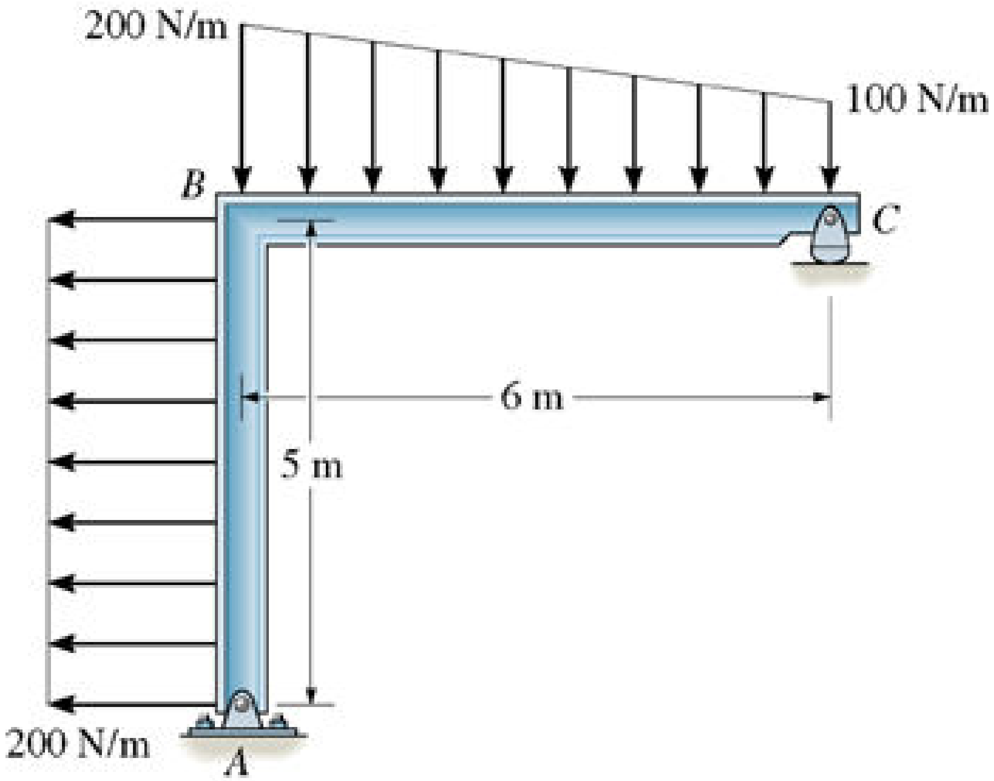
Exercícios Propostos

- 7) Substitua as carga atuantes por uma única força resultante e especifique sua localização sobre a viga em relação ao ponto *A*.



Exercícios Propostos

- 8) Substitua as carga atuantes por uma única força resultante equivalente e especifique sua localização sobre a viga *AB* medido em relação ao ponto *A*.



Próxima Aula

- Apoios Submetidos a Forças Bidimensionais.
- Cálculo de Reações de Apoio em Estruturas Isostáticas.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 15 – Reações de Apoio em Vigas e Estruturas

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Apoios Submetidos a Forças Bidimensionais.
- Cálculo de Reações de Apoio em Estruturas Isostáticas.

Equações de Equilíbrio da Estática
Sistema Bidimensional

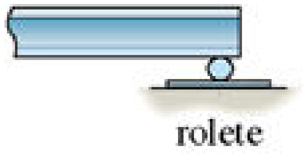
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

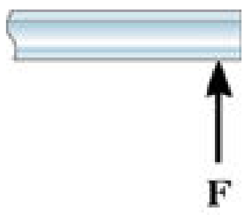
$$\sum M = 0$$

Tipos de Apoios

- 1) Rolete ou Apoio Móvel.
- Possui apenas uma incógnita, a reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície do ponto de contato.



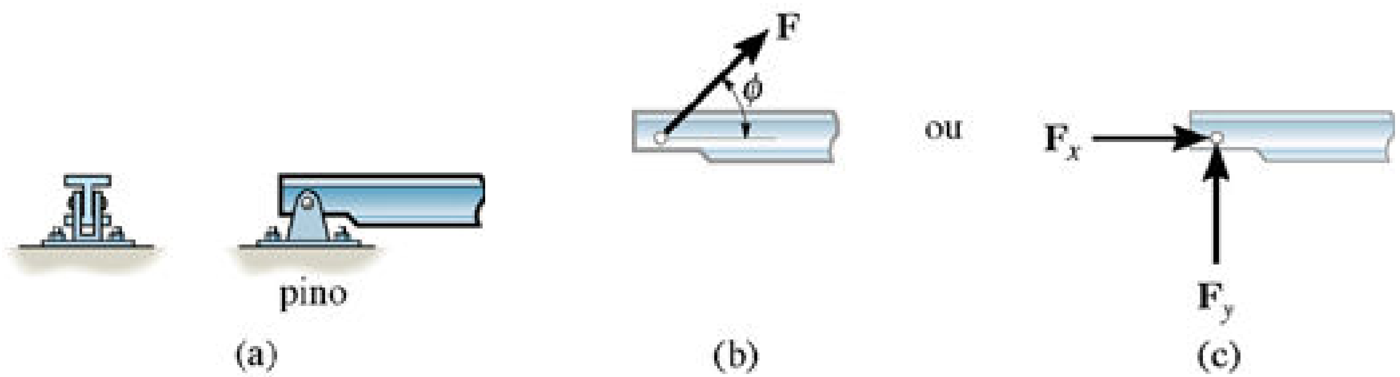
(a)



(b)

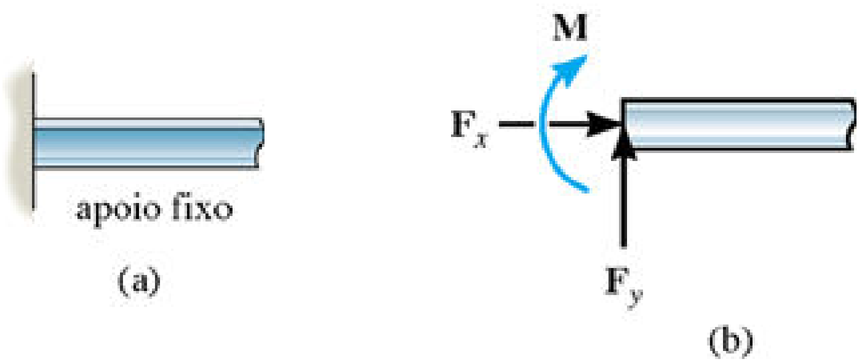
Tipos de Apoios

- 2) Articulação ou Pino.
- Possui duas incógnitas, as reações são os dois componentes da força resultante e atuam paralela e perpendicular à superfície do ponto de contato.



Tipos de Apoios

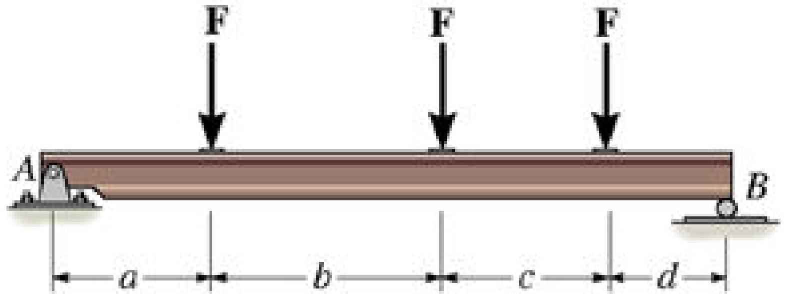
- 3) Apoio Fixo ou Engastamento.
- Possui três incógnitas, as reações são os dois componentes da força resultante que atuam paralela e perpendicular à superfície do ponto de contato e um momento.



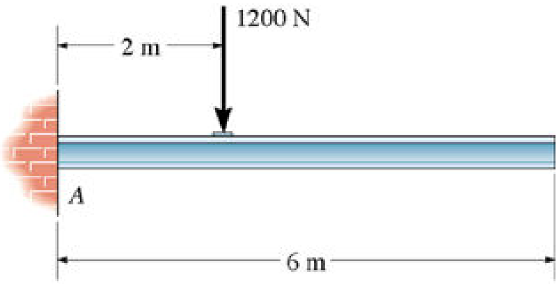
Exemplos de Apoios

Diagrama de Corpo Livre – Analogia Prática/Teórica

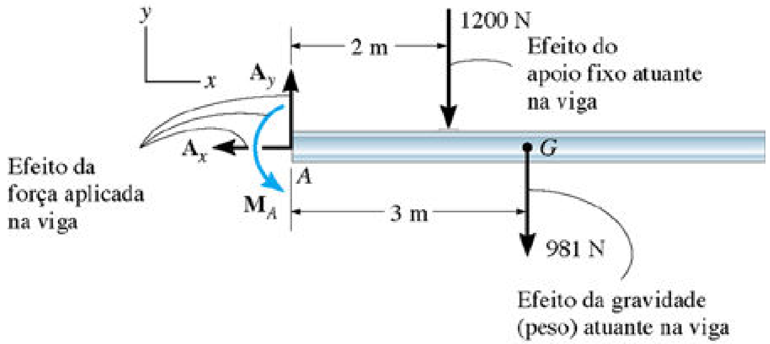
(a)



(b)



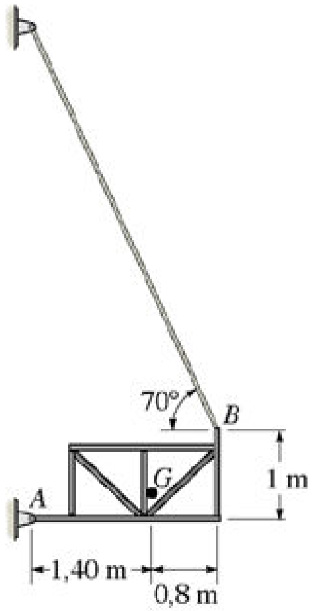
(a)



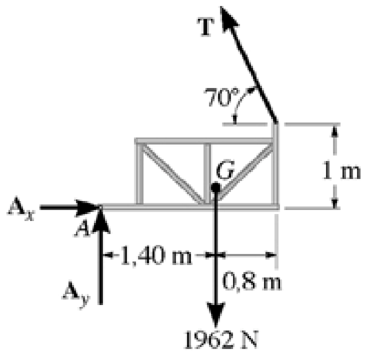
(b)

Diagrama de Corpo Livre – Analogia Prática/Teórica

(a)



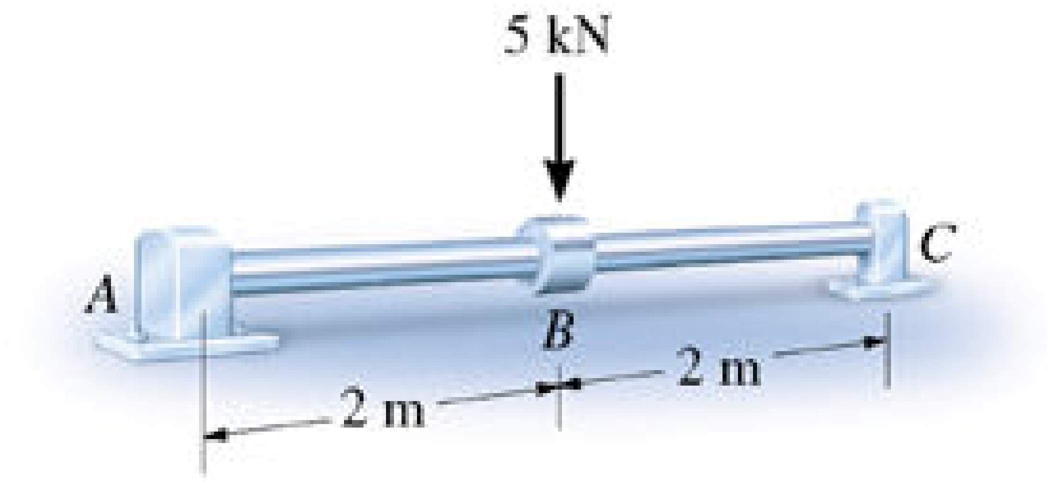
(b)



(c)

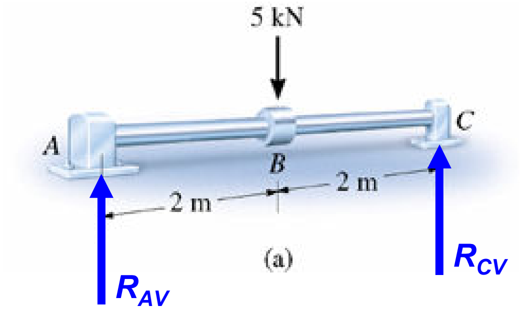
Exercício 1

- 1) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e C.



(a)

Solução do Exercício 1



- Equilíbrio de momentos em relação ao ponto A.

$$\sum M_A = 0$$

$$-5 \cdot 2 + R_{CV} \cdot 4 = 0$$

$$R_{CV} = \frac{10}{4} \Rightarrow R_{CV} = 2{,}5\text{kN}\uparrow$$

- Equilíbrio de forças em relação ao eixo y.

$$\sum F_y = 0$$

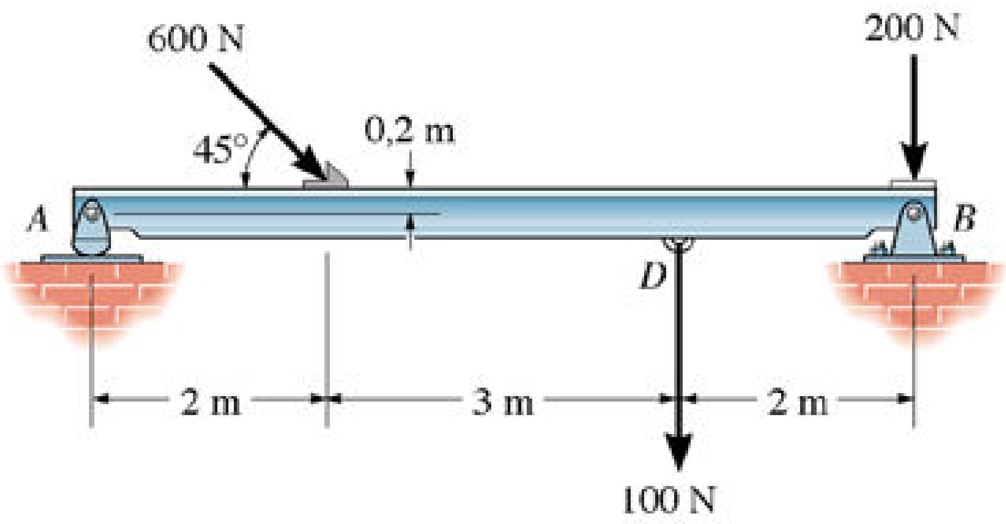
$$R_{AV} + R_{CV} - 5 = 0$$

$$R_{AV} = 5 - 2{,}5$$

$$R_{AV} = 2{,}5\text{kN}\uparrow$$

Exercício 2

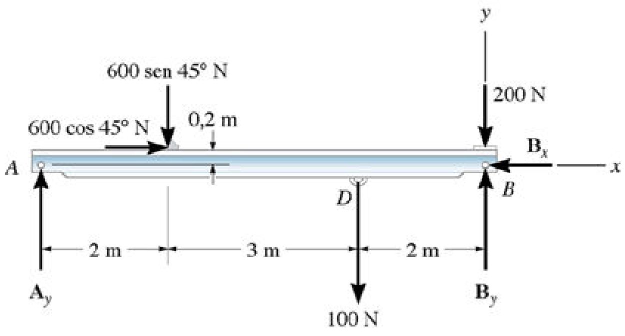
- 2) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



(a)

Solução do Exercício 2

- Diagrama de Corpo Livre.



(b)

- Equilíbrio de momentos em relação ao ponto B.

$$\sum M_B = 0$$

$$100 \cdot 2 + 600 \cdot sen45^o \cdot 5 - 600 \cdot \cos 45^o \cdot 0{,}2 - A_y \cdot 7 = 0$$

$$A_y = \frac{100 \cdot 2 + 600 \cdot sen45^o \cdot 5 - 600 \cdot \cos 45^o \cdot 0{,}2}{7}$$

$$A_y = 319\text{N} \uparrow$$

- Equilíbrio de forças em relação ao eixo y.

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 100 - 200 - 600 \cdot sen45^o = 0$$

$$B_y = 100 + 200 + 600 \cdot sen45^o - A_y$$

$$B_y = 100 + 200 + 600 \cdot sen45^o - 319$$

$$B_y = 405\text{N} \uparrow$$

- Equilíbrio de forças em relação ao eixo x.

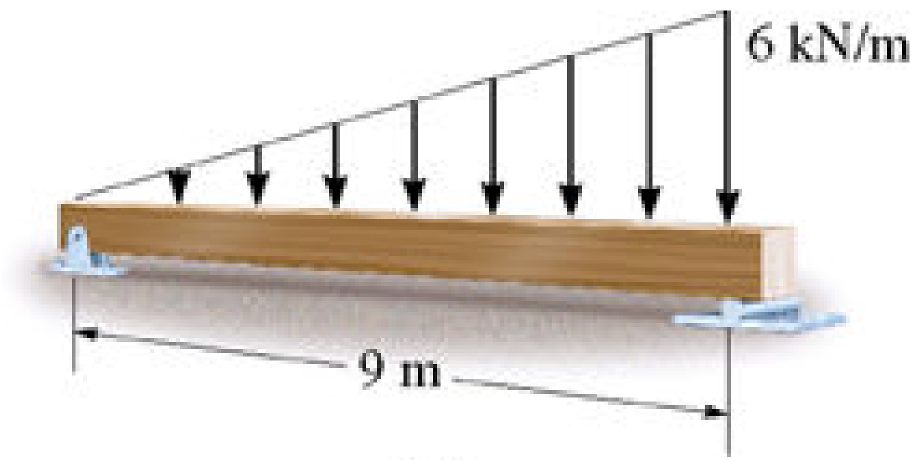
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 600 \cdot \cos 45^o - B_x = 0$$

$$600 \cdot \cos 45^o = B_x \quad \Rightarrow \quad B_x = 424\text{N} \leftarrow$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Exercícios Propostos

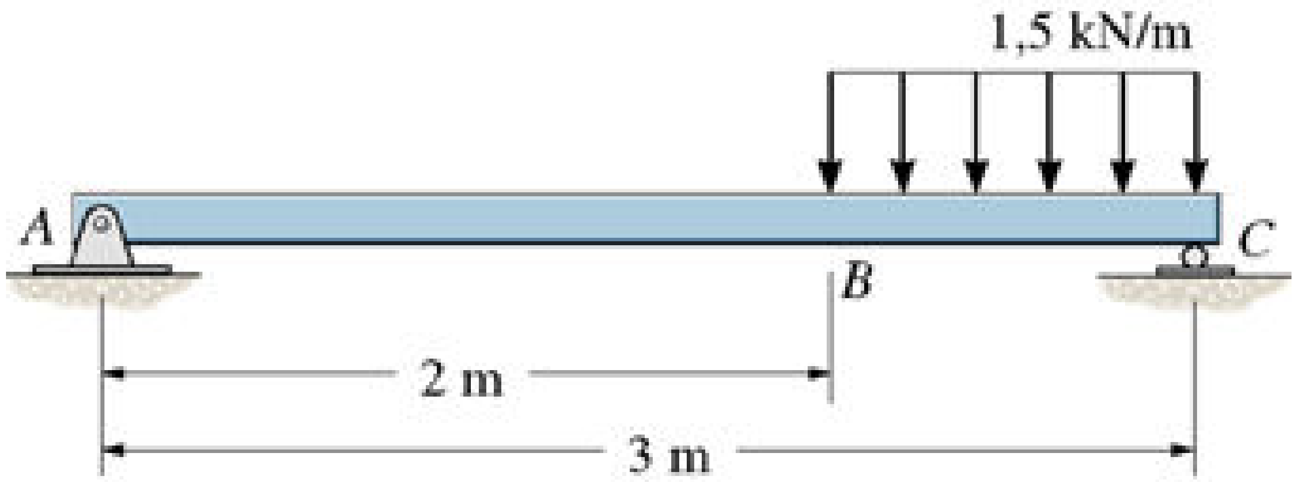
- 1) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios.



(a)

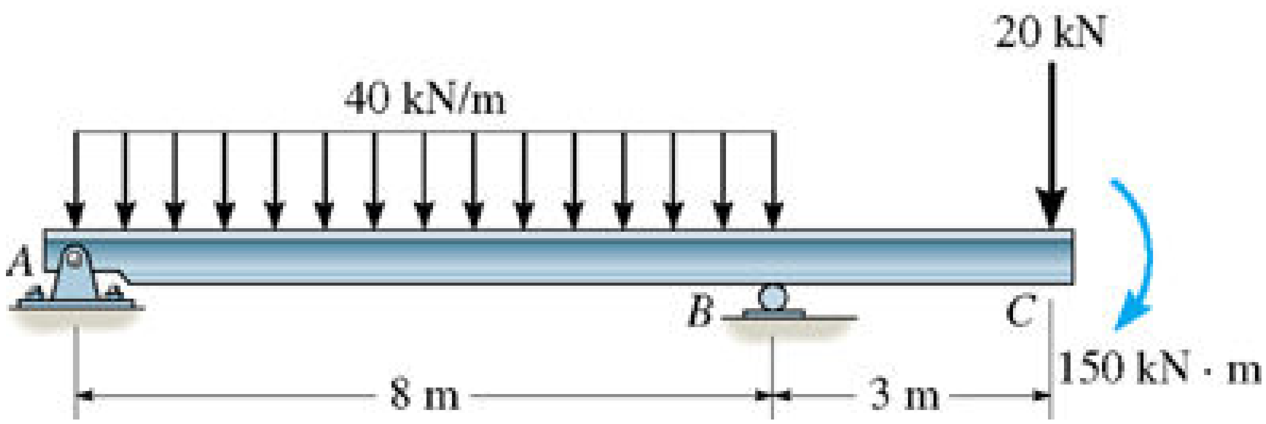
Exercícios Propostos

- 2) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e C.



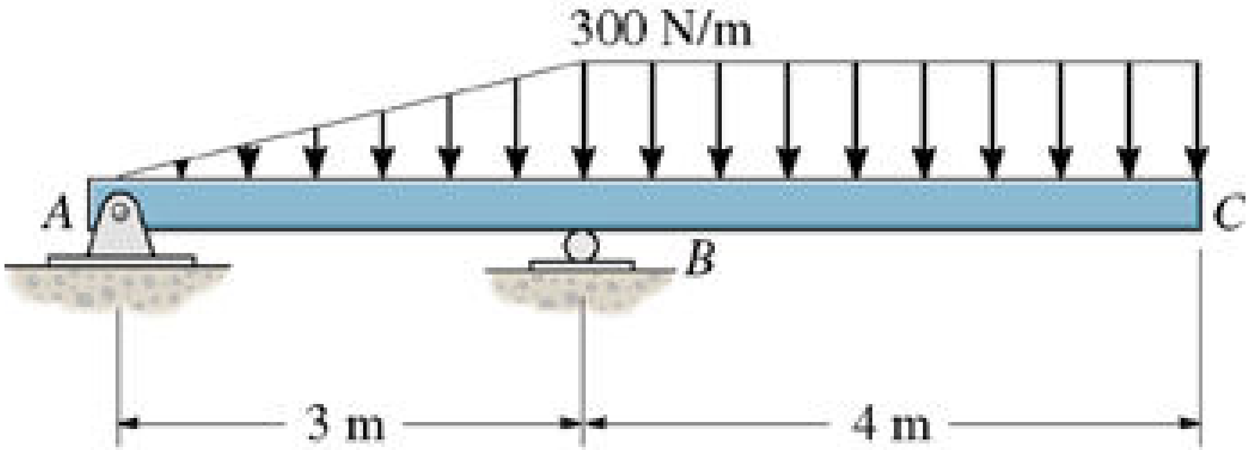
Exercícios Propostos

- 3) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



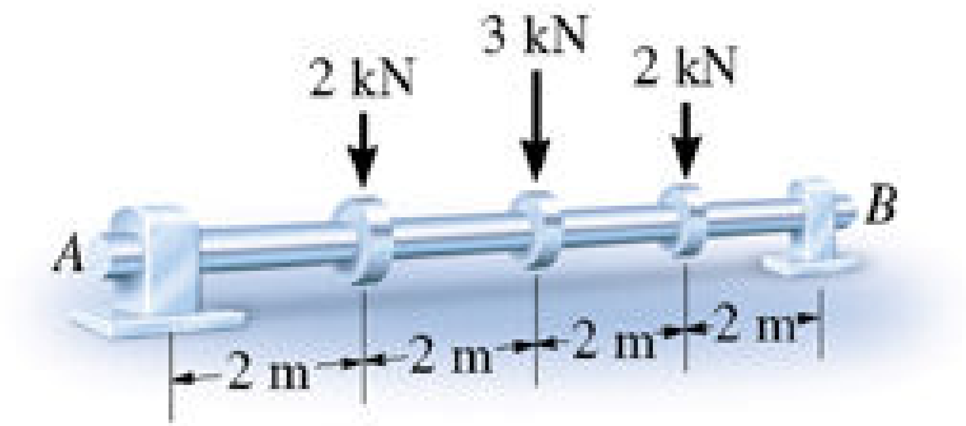
Exercícios Propostos

- 4) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



Exercícios Propostos

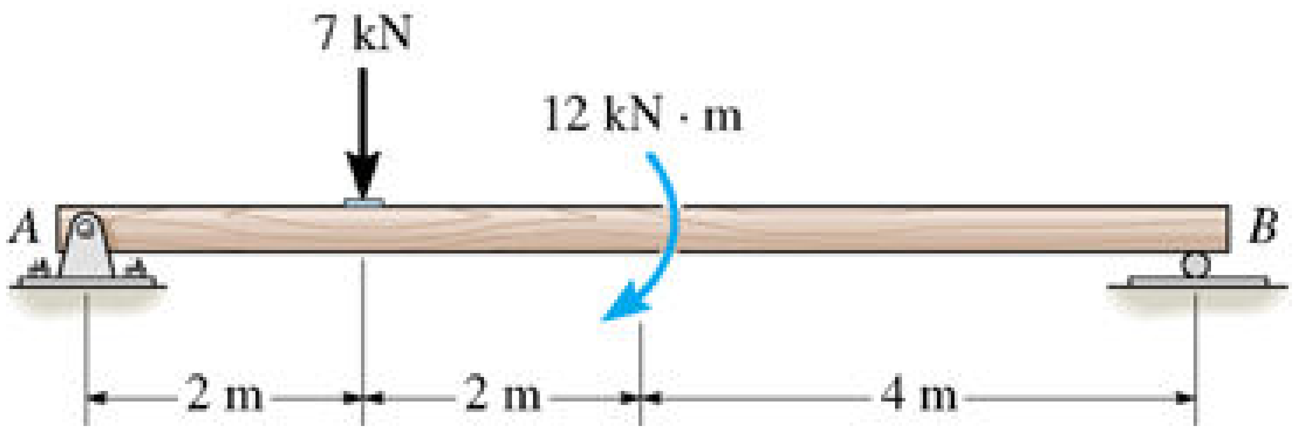
- 5) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



(a)

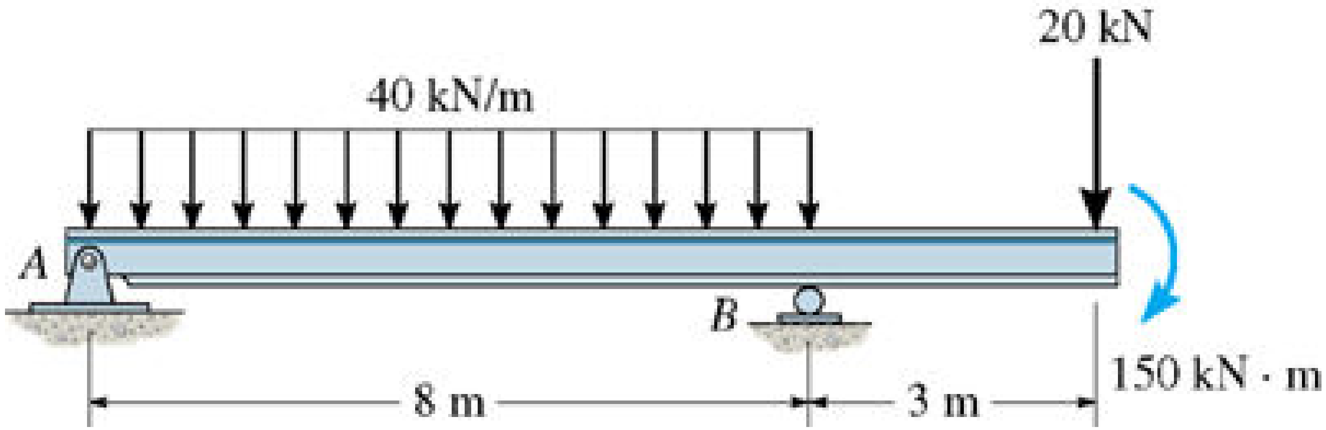
Exercícios Propostos

- 6) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



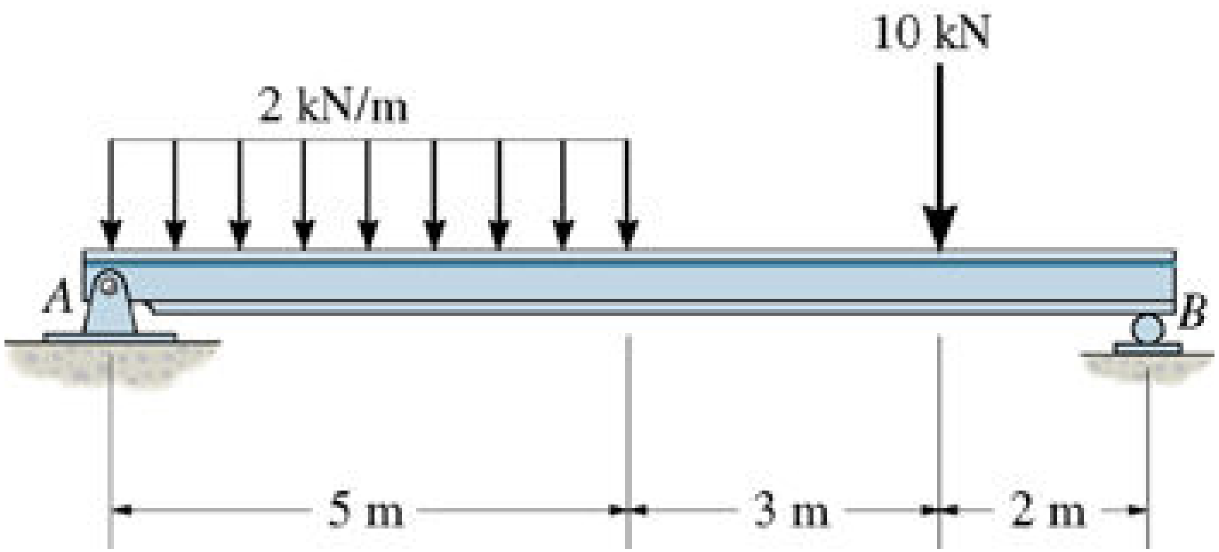
Exercícios Propostos

- 7) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



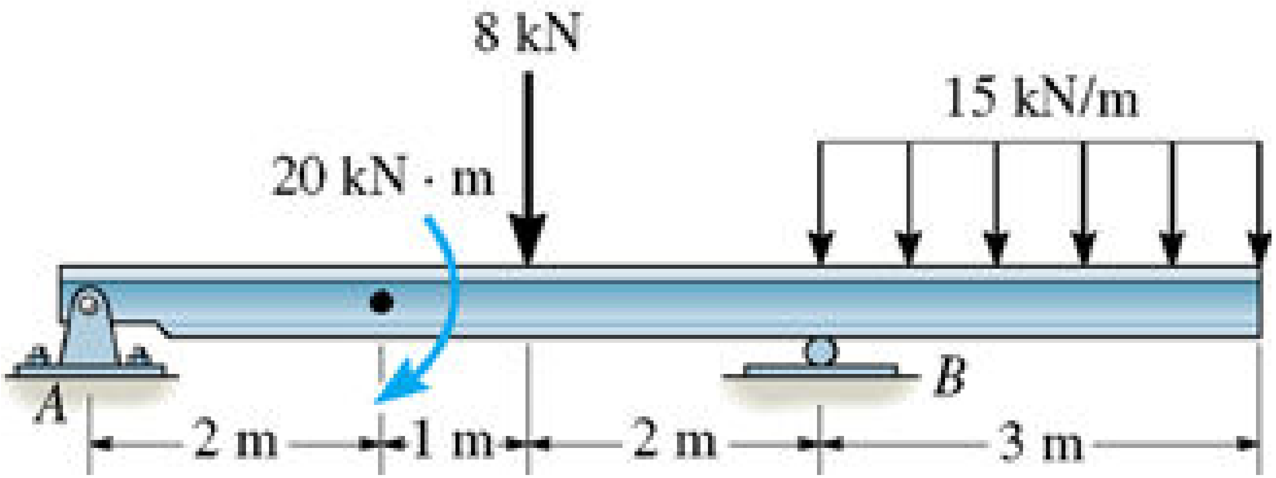
Exercícios Propostos

- 8) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



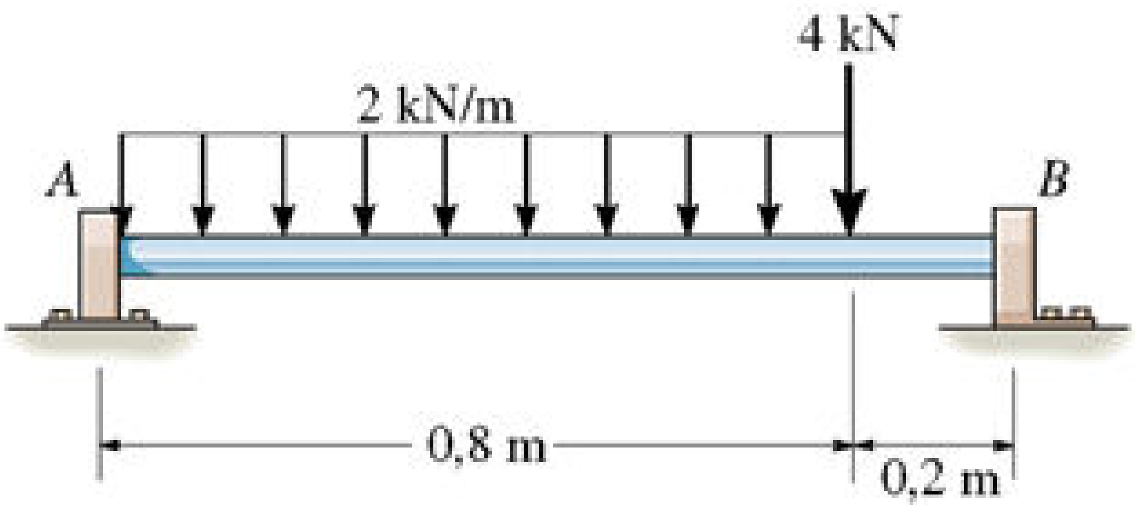
Exercícios Propostos

- 9) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



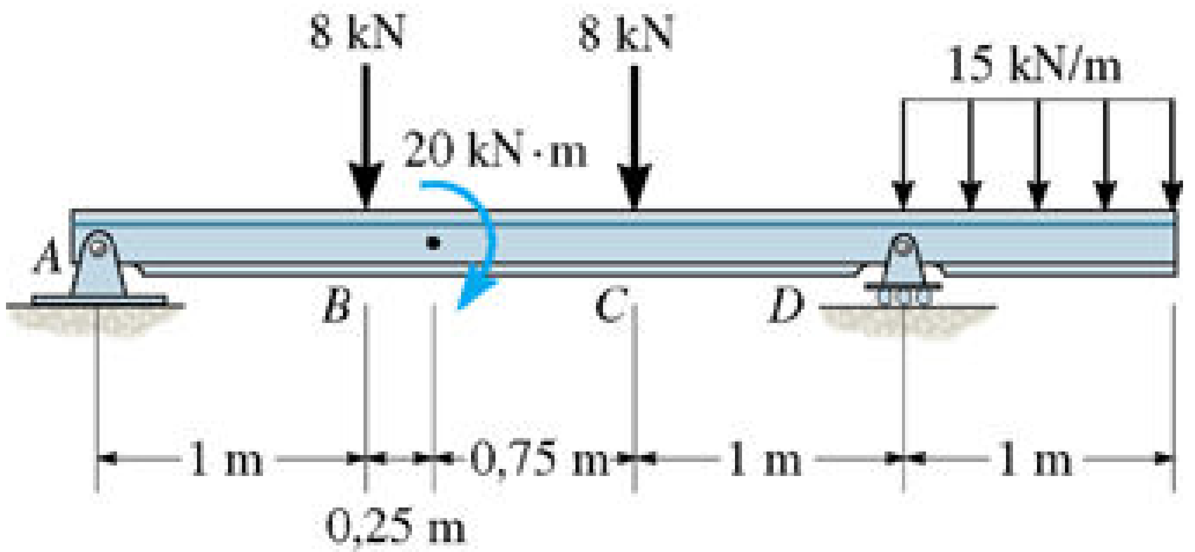
Exercícios Propostos

- 10) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



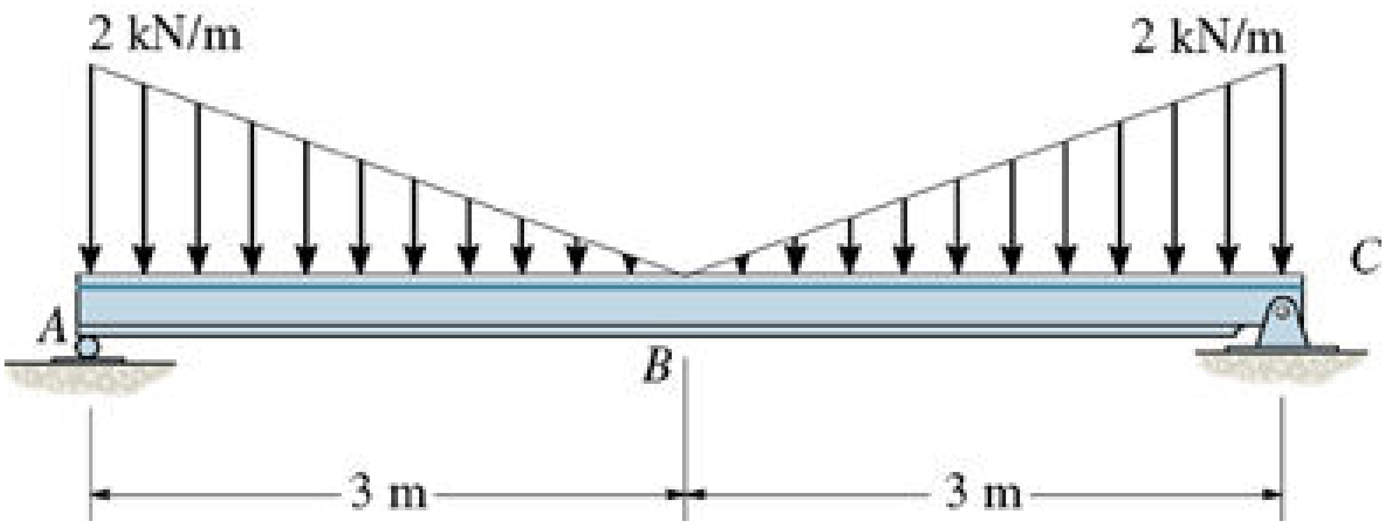
Exercícios Propostos

- 11) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e D.



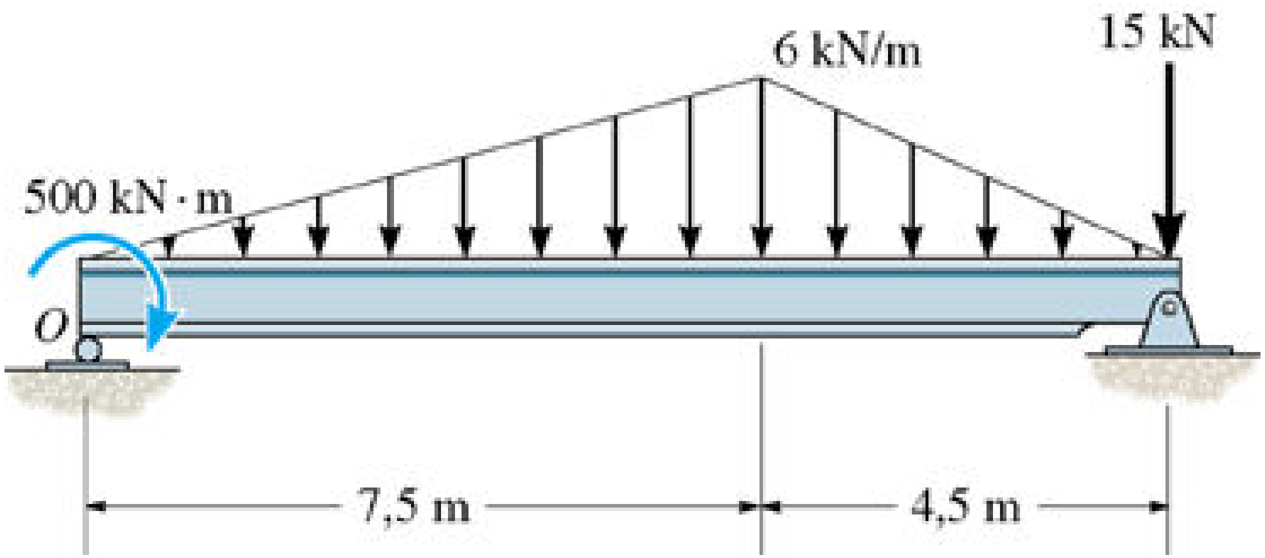
Exercícios Propostos

- 12) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e C.



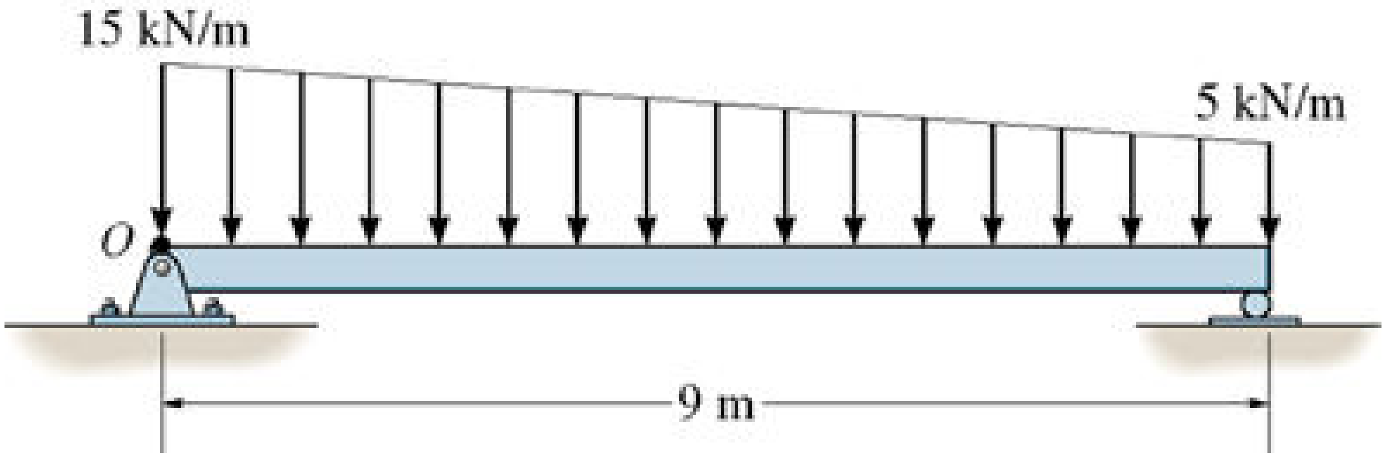
Exercícios Propostos

- 13) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios.



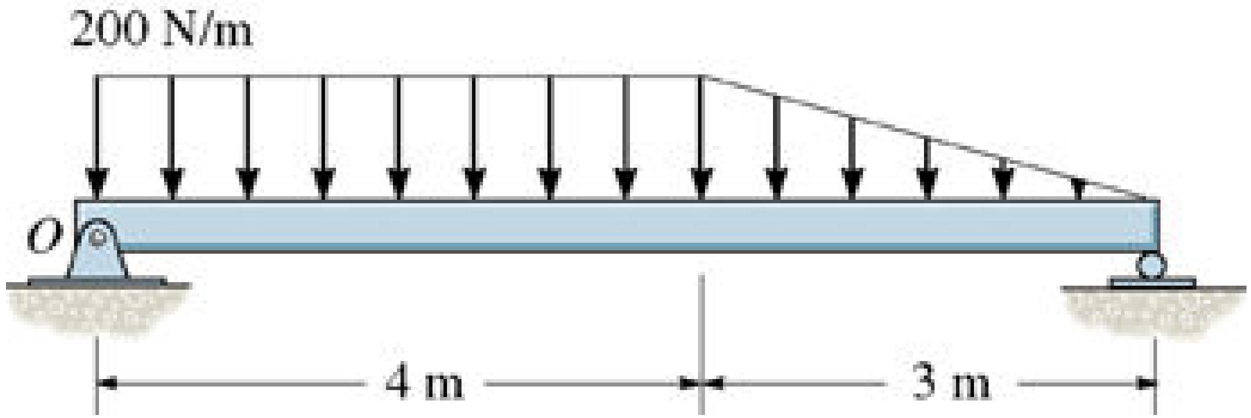
Exercícios Propostos

- 14) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios.



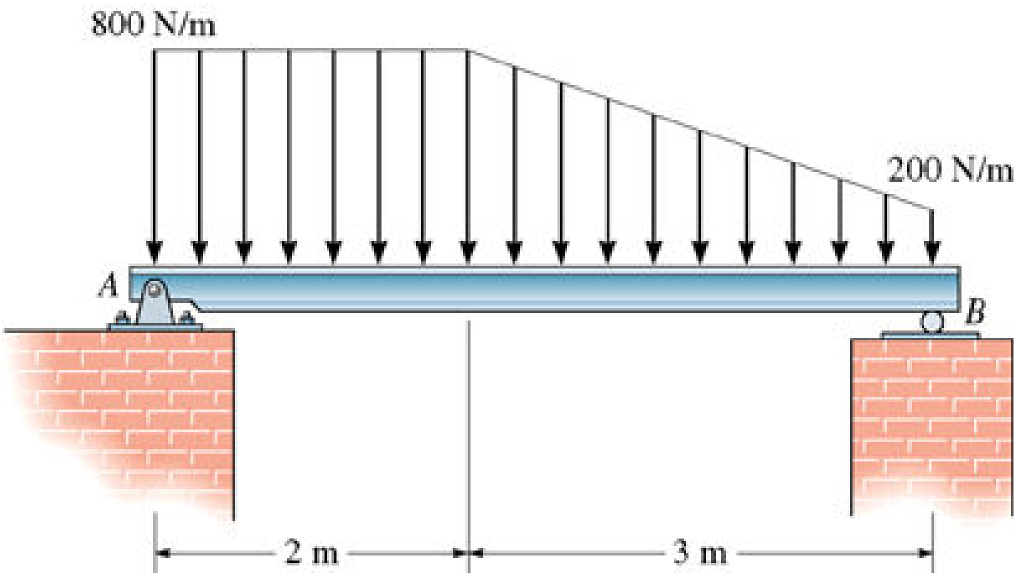
Exercícios Propostos

- 15) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios.



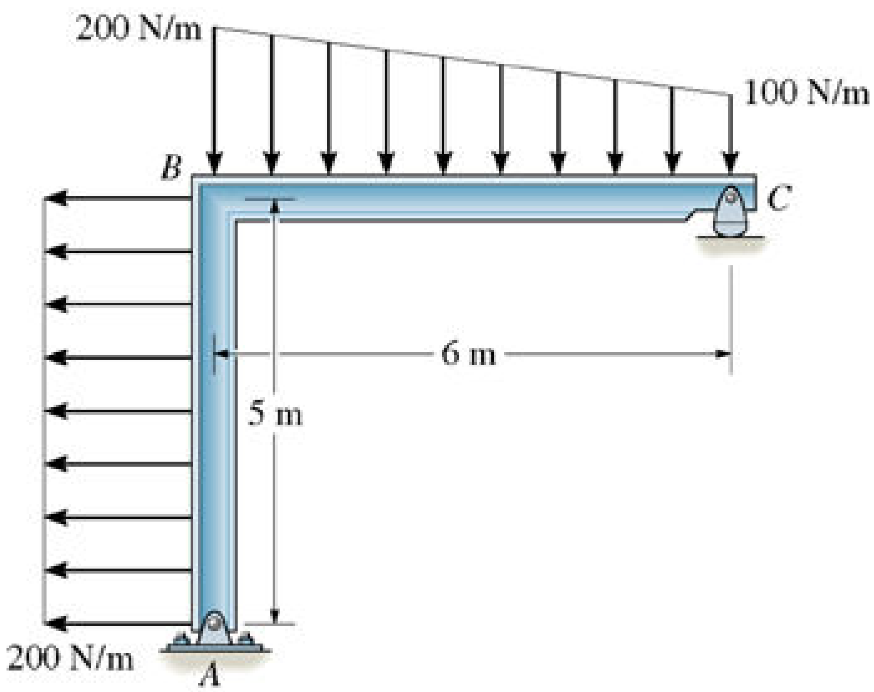
Exercícios Propostos

- 16) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



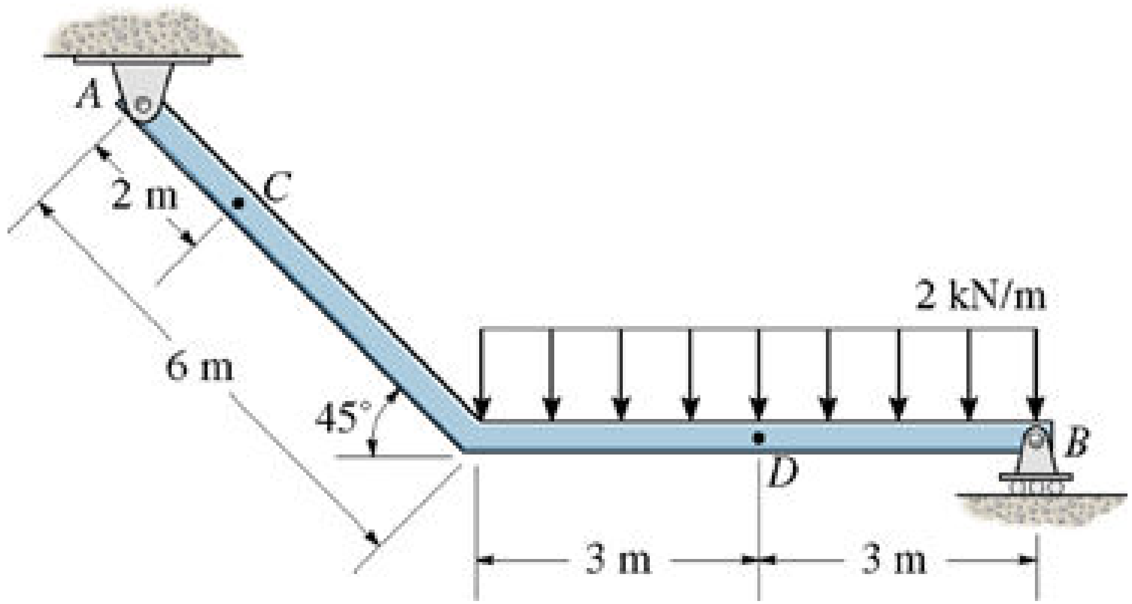
Exercícios Propostos

- 17) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e C.



Exercícios Propostos

- 18) Para a estrutura mostrada na figura determine as reações nos apoios A e B.



Próxima Aula

- Equilíbrio do Corpo Rígido em Duas Dimensões.
- Equilíbrio do Corpo Rígido em Três Dimensões.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 16 – Equilíbrio do Corpo Rígido em Duas e Três Dimensões

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Equilíbrio do Corpo Rígido em Duas Dimensões.
- Equilíbrio do Corpo Rígido em Três Dimensões.

Equações de Equilíbrio da Estática
Sistema Bidimensional

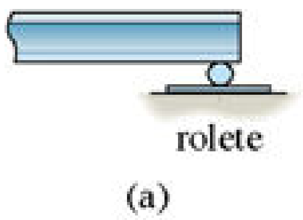
$$\sum F_x = 0$$

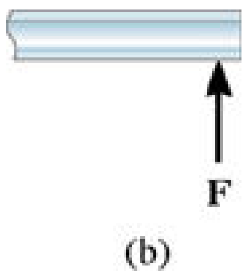
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Tipos de Apoios

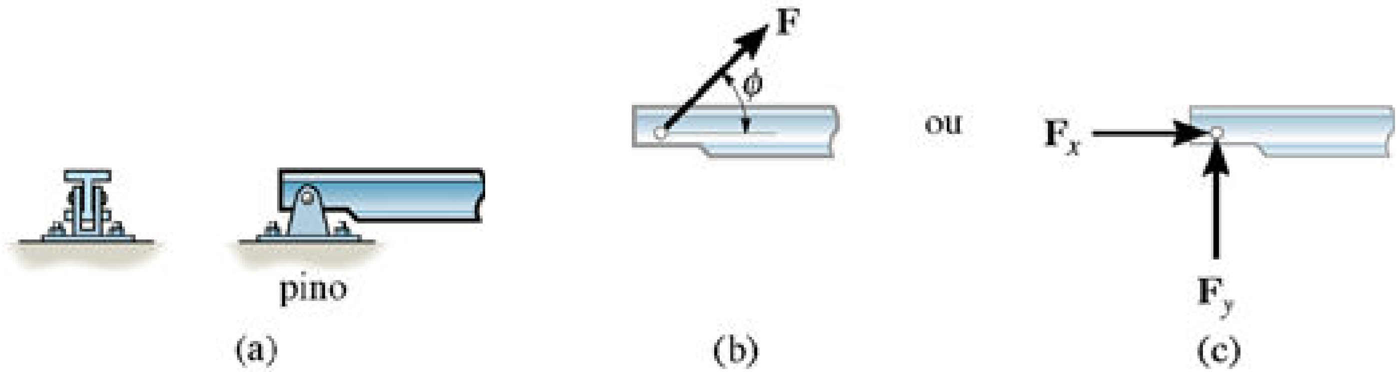
- 1) Rolete ou Apoio Móvel.
- Possui apenas uma incógnita, a reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície do ponto de contato.





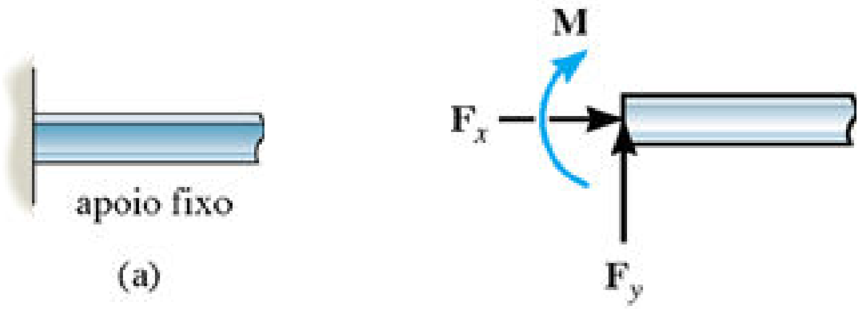
Tipos de Apoios

- 2) Articulação ou Pino.
- Possui duas incógnitas, as reações são os dois componentes da força resultante e atuam paralela e perpendicular à superfície do ponto de contato.



Tipos de Apoios

- 3) Apoio Fixo ou Engastamento.
- Possui três incógnitas, as reações são os dois componentes da força resultante que atuam paralela e perpendicular à superfície do ponto de contato e um momento.

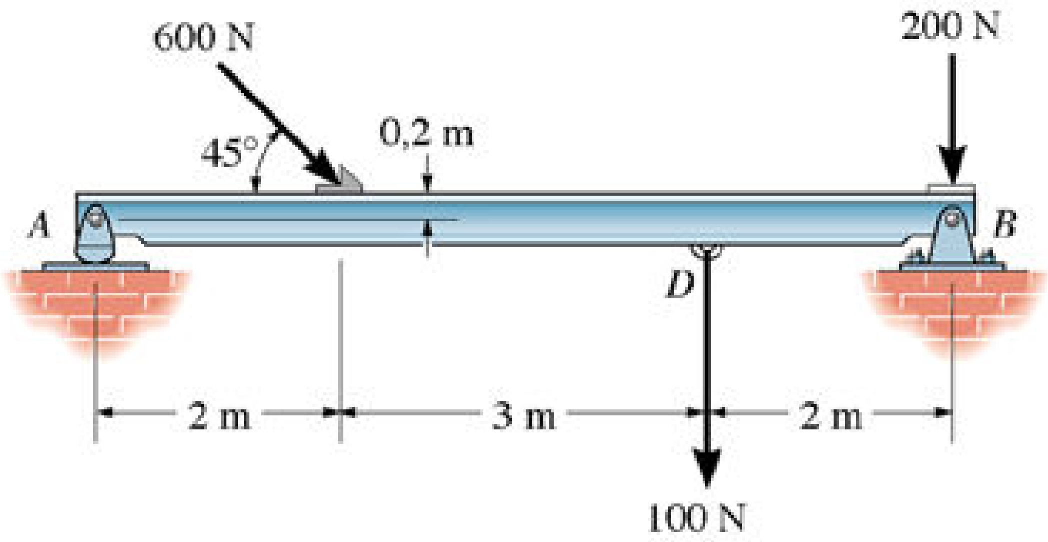


(a) (b)

Exemplos de Apoios

Exercício 1

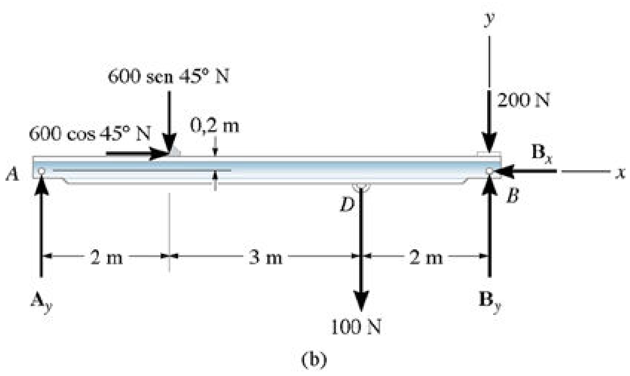
- 1) Determine os componentes horizontal e vertical das reações no pontos *A* e *B* para a viga mostrada na figura a seguir.



(a)

Solução do Exercício 1

Equações de Equilíbrio:



$$\sum M_B = 0$$

$$(100 \cdot 2) + (600 \cdot sen 45° \cdot 5) - (600 \cdot \cos 45° \cdot 0{,}2) - (A_y \cdot 7) = 0$$

$$A_y = \frac{2236}{7}$$

$$A_y = 319\text{N}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$600 \cdot \cos 45° - B_x = 0$$

$$B_x = 424\text{N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$319 - (600 \cdot sen 45°) - 100 - 200 + B_y = 0$$

$$B_y = 405\text{N}$$

Equações de Equilíbrio Sistemas Tridimensionais

Equilíbrio de Forças:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

Momentos:

$$\sum M_x = 0$$
$$\sum M_y = 0$$
$$\sum M_z = 0$$

Apoios de Sistemas Tridimensionais

Tipos de Ligação	Reação	Número de Incógnitas
(1) cabo	F	Uma incógnita. A reação é uma força que atua no sentido de tracionar o cabo em sua direção.
(2) apoio sobre superfície lisa	F	Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.
(3) rolete liso	F	Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.
(4) junta esférica	F_z, F_x, F_y	Três incógnitas. A reação é representada pelas três componentes de uma força.
(5) mancal radial	M_z, F_z, M_x, F_x	Quatro incógnitas. A reações são duas componentes de força e duas componentes de momento que atuam perpendicularmente ao eixo.

Tipos de Ligação	Reação	Número de Incógnitas
(6) mancal simples com eixo de seção quadrada	M_z, F_z, M_x, M_y, F_x	Cinco incógnitas. As reações são duas componentes de força e três componentes de momento.
(7) mancal de encosto	M_z, F_y, F_z, M_x, F_x	Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento.
(8) pino liso ou articulação	M_z, F_z, F_y, M_y, F_x	Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento.
(9) dobradiça	M_z, F_z, F_y, F_x, M_x	Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento.
(10) apoio fixo ou engastamento	M_z, F_z, F_x, F_y, M_y, M_x	Seis incógnitas. As reações são três componentes de força e três componentes de momento.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Modelos de Apoios Tridimensionais

Junta Esférica

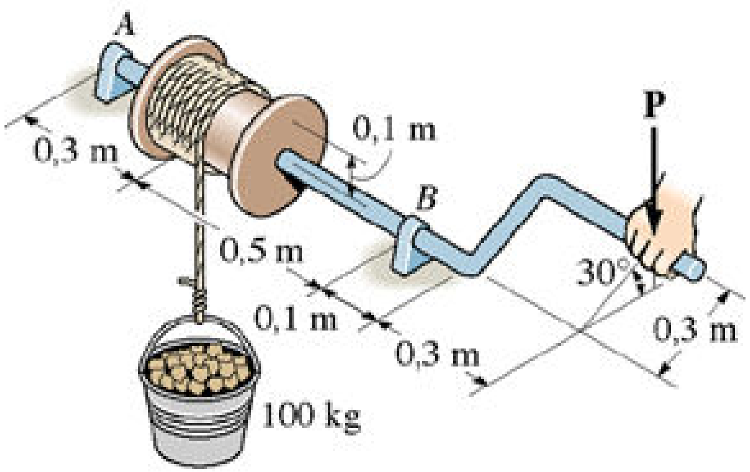
Mancal de Encosto

Mancal Simples

Articulação

Exercício 2

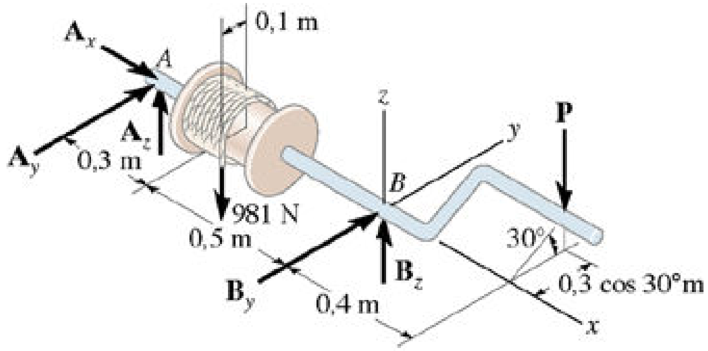
- 2) O molinete mostrado na figura é apoiado por um mancal de encosto em *A* e um mancal simples em *B*, que estão adequadamente alinhados no eixo. Determine a intensidade da força vertical *P* que deve ser aplicada ao cabo da manivela para manter em equilíbrio um balde de 100kg. Calcule também as reações nos mancais.



(a)

Solução do Exercício 2

Equações de Equilíbrio:



(b)

$$\sum M_x = 0$$

$$(981 \cdot 0{,}1) - (P \cdot 0{,}3 \cdot \cos 30°) = 0$$

$$P = \frac{98{,}1}{0{,}3 \cdot \cos 30°} \Rightarrow P = 377{,}6\,\text{N}$$

$$\sum M_y = 0$$

$$-(981 \cdot 0{,}5) + (A_z \cdot 0{,}8) + (377{,}6 \cdot 0{,}4) = 0$$

$$A_z = \frac{490{,}5 - 151{,}04}{0{,}8}$$

$$A_z = 424{,}3\,\text{N}$$

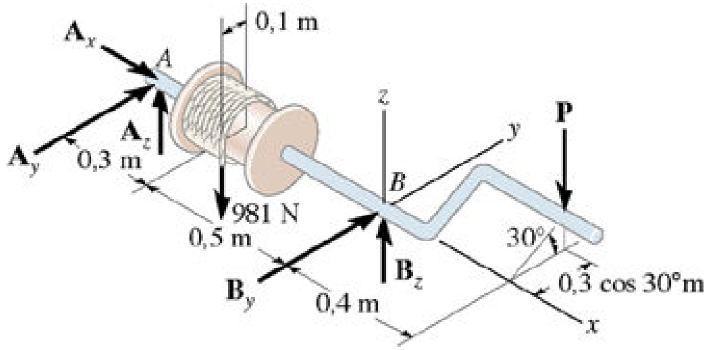
$$\sum M_z = 0$$

$$-(A_y \cdot 0{,}8) = 0$$

$$A_y = 0$$

Solução do Exercício 2

Equilíbrio de Forças:



(b)

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$0 + B_y = 0$$

$$B_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

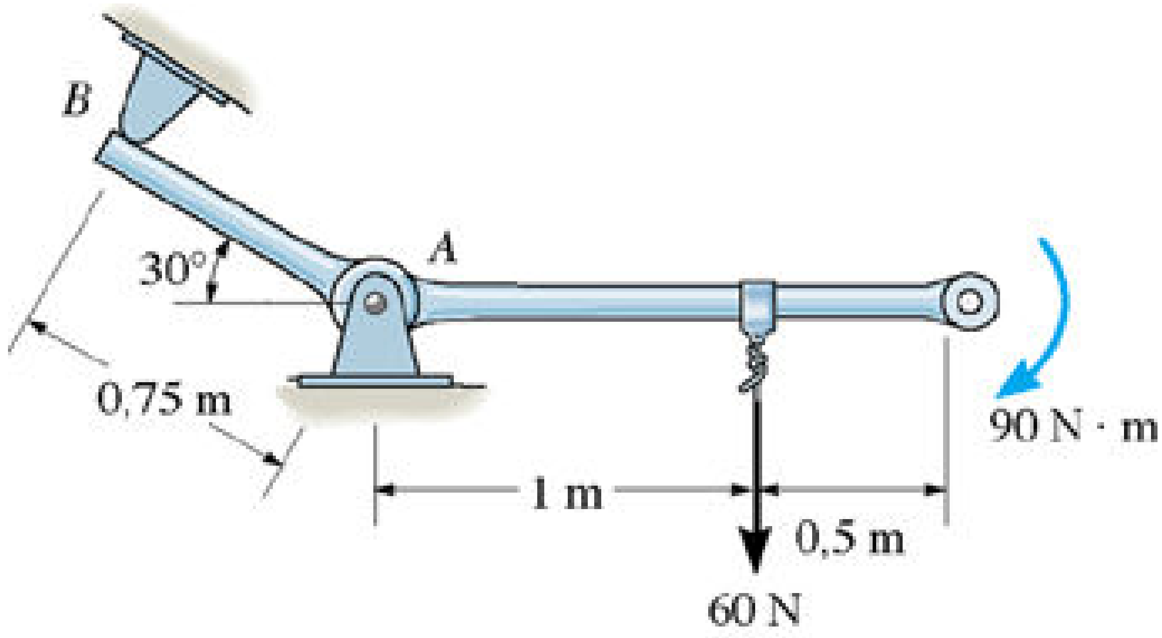
$$A_z + B_z - 981 - P = 0$$

$$424{,}3 + B_z - 981 - 377{,}6 = 0$$

$$B_z = 934{,}3\text{N}$$

Exercícios Propostos

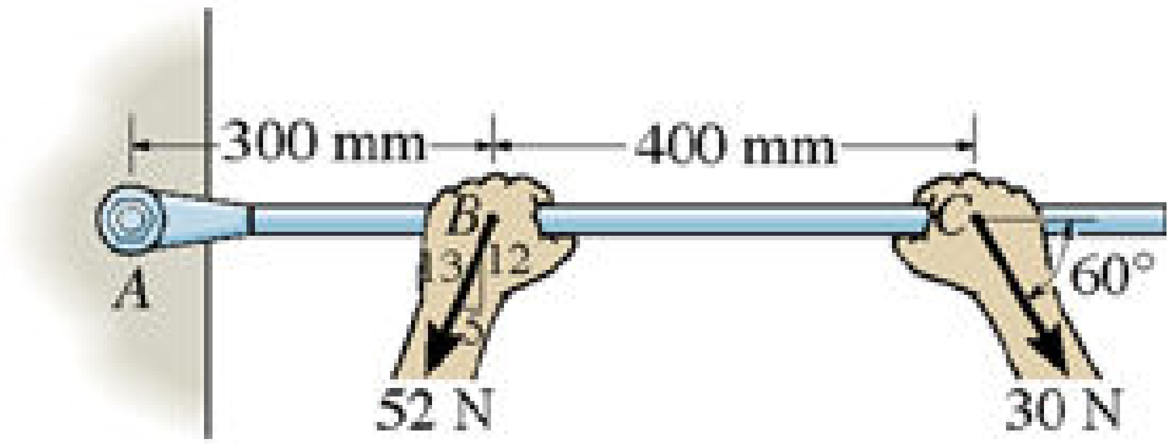
- 1) A haste mostrada na figura é conectada por um pino em *A* e sua extremidade *B* tem o movimento limitado pelo apoio liso em *B*. Calcule os componentes horizontal e vertical da reação no pino *A*.



(a)

Exercícios Propostos

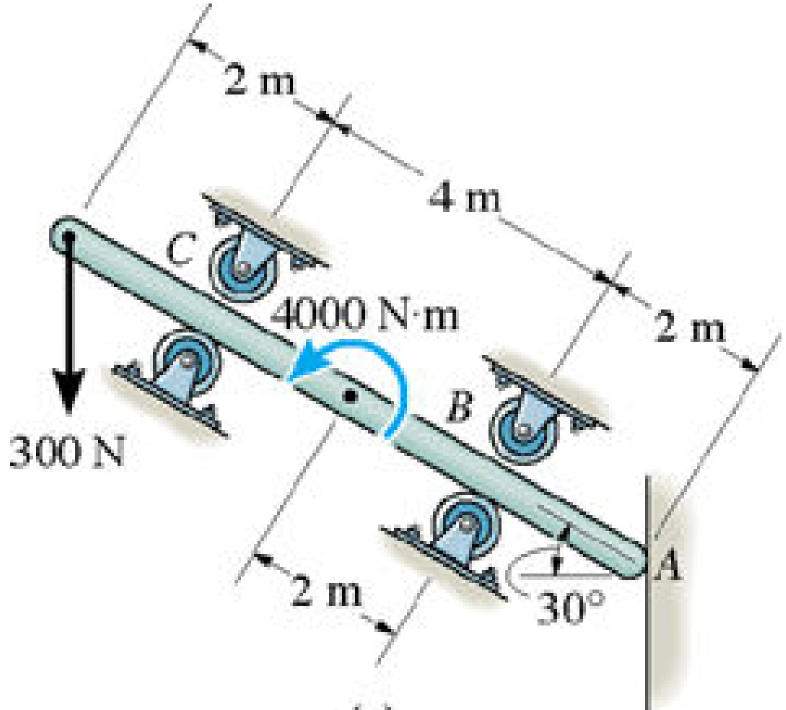
- 2) A chave de boca mostrada na figura é utilizada para apertar o parafuso em A. Se a chave não gira quando a carga é aplicada ao seu cabo, determine o momento e a força da chave aplicados ao parafuso.



(a)

Exercícios Propostos

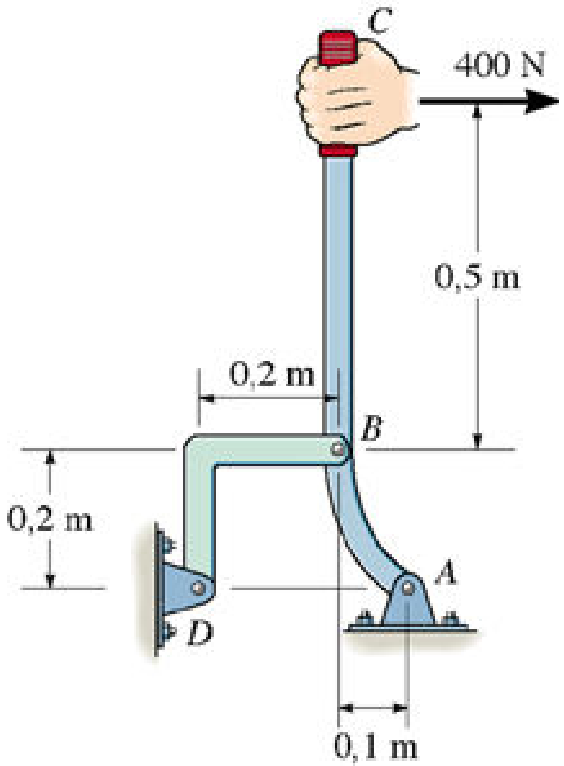
- 3) A barra lisa e uniforme mostrada na figura está sujeita a uma força e um momento. Se a barra é apoiada em A por uma parede lisa e em B e C, na parte superior e inferior, é apoiada por roletes, determine as reações nesses apoios. Despreze o peso da barra.



(a)

Exercícios Propostos

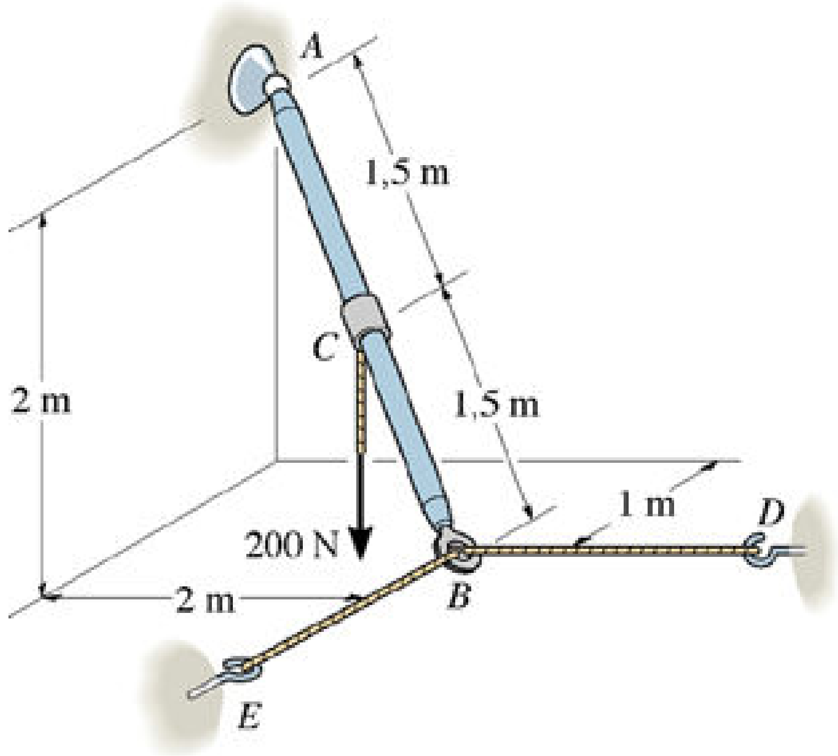
- 4) A alavanca *ABC* é apoiada por pinos em *A* e conectada a um pequeno braço *BD*. Considerando que os pesos dos elementos são desprezíveis, determine a força do pino sobre a alavanca em *A*.



(a)

Exercícios Propostos

- 5) A barra *AB* mostrada na figura está sujeita a uma força de 200N. Determine as reações na junta esférica *A* e a tensão nos cabos *BD* e *BE*.



(a)

Próxima Aula

- Estudo de Treliças Planas.
- Método dos Nós.
- Método das Seções.

Mecânica Técnica

Aula 17 – Estudo de Treliças Planas

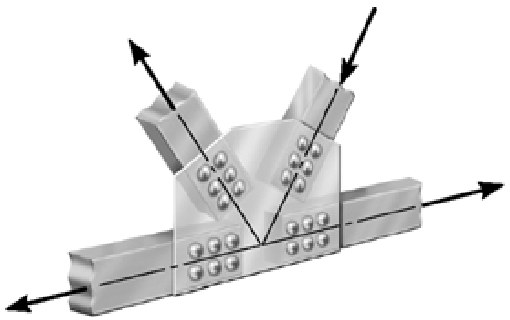
Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

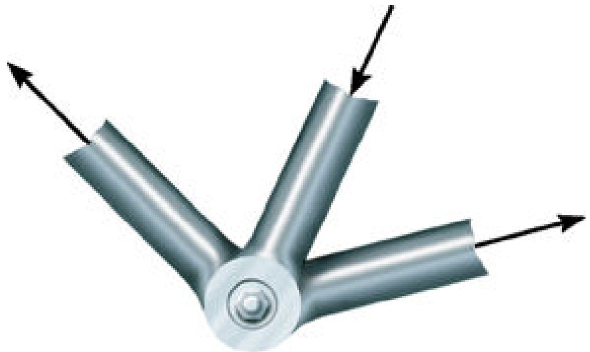
- Estudo de treliças Planas.
- Método dos Nós.
- Método das Seções.

Treliças Simples

- A treliça é uma estrutura de elementos delgados ligados entre si pelas extremidades.
- Geralmente os elementos de uma treliça são de madeira ou de aço e em geral são unidos por uma placa de reforço com mostrado na figura.



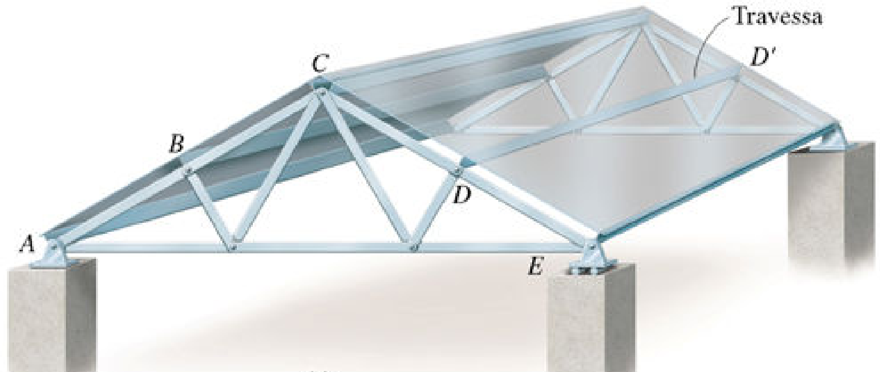
(a)



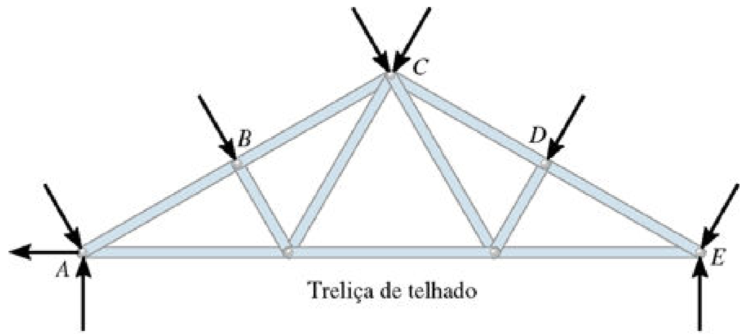
(b)

Treliças Planas

- As treliças planas são aquelas que se distribuem em um plano e geralmente são utilizadas em estruturas de telhados e pontes.

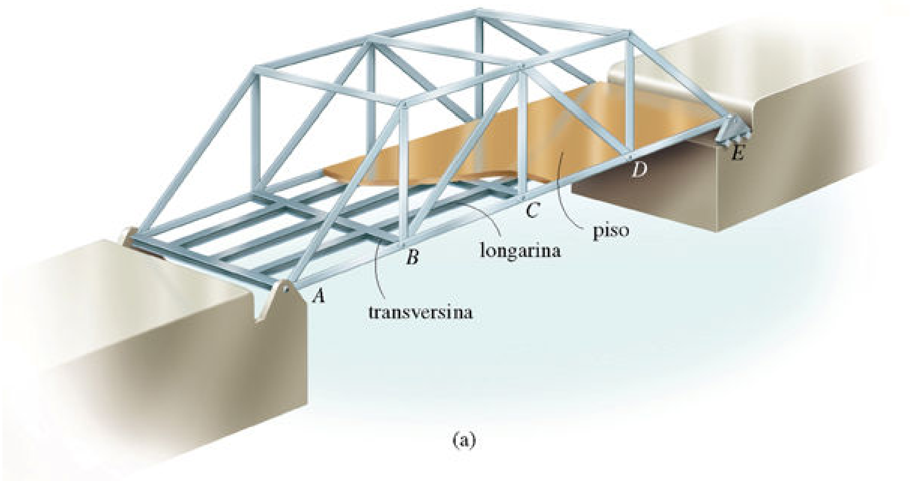


(a)

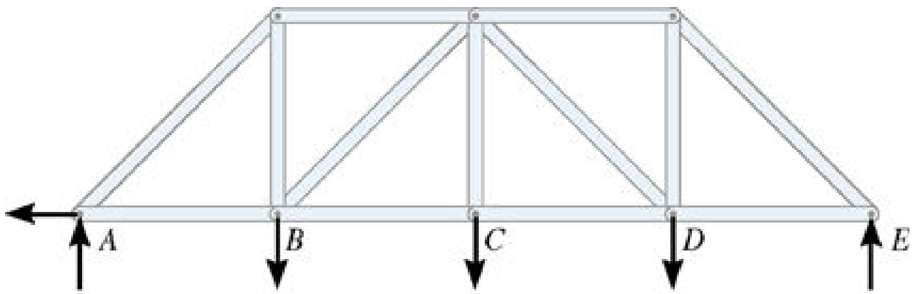


(b)

Treliça de uma Ponte



(a)



Treliça da Ponte

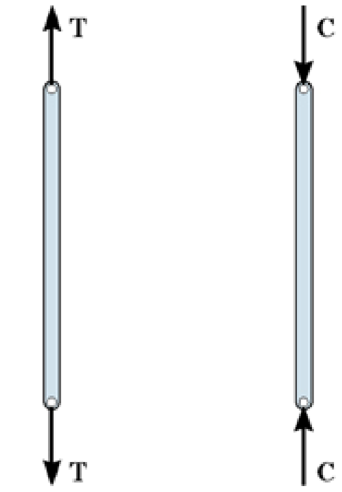
(b)

Projeto de Treliças

- Hipóteses:
- 1) Todas as cargas são aplicadas aos nós, normalmente o peso próprio é desprezado pois a carga suportada é bem maior que o peso do elemento.
- 2) Os elementos são ligados entre si por superfícies lisas.

Elemento de Duas Forças

- Devido as hipóteses simplificadoras, os elementos de uma treliça atuam como barras de duas forças.
- Se uma força tende a alongar o elemento, é chamada de força de tração.
- Se uma força tende a encurtar o elemento, é chamada de força de compressão.



Tração
(a)

Compressão
(b)

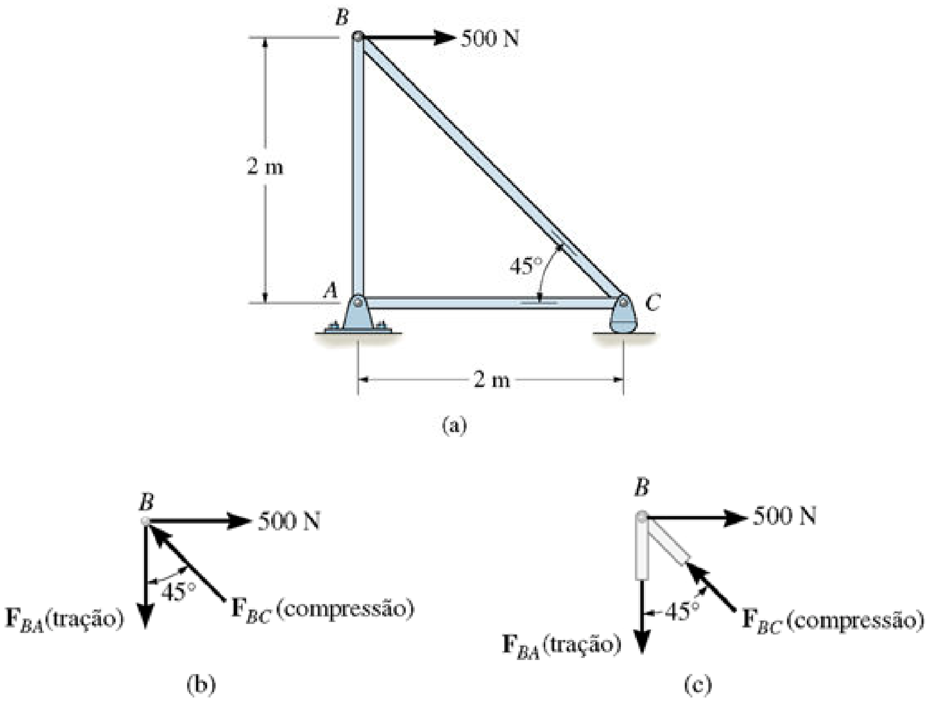
Método dos Nós

- A análise é realizada a partir do diagrama de corpo livre de cada nó que compõe a treliça.
- São válidas as equações de equilíbrio da estática.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

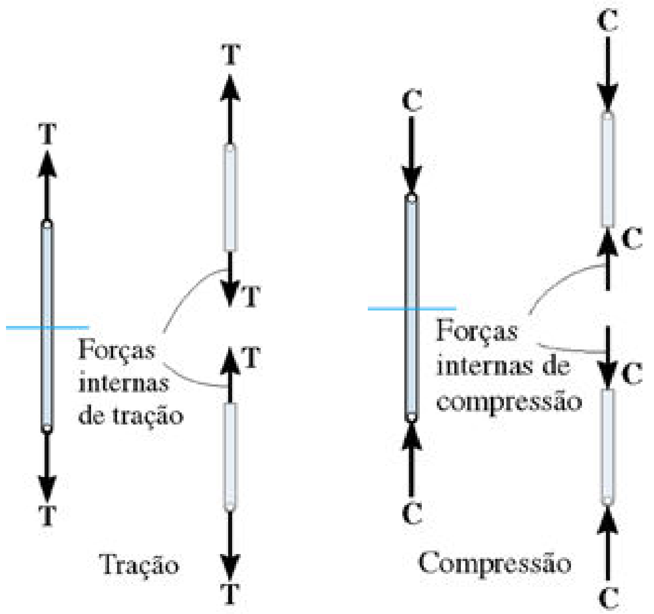
$$\sum M = 0$$

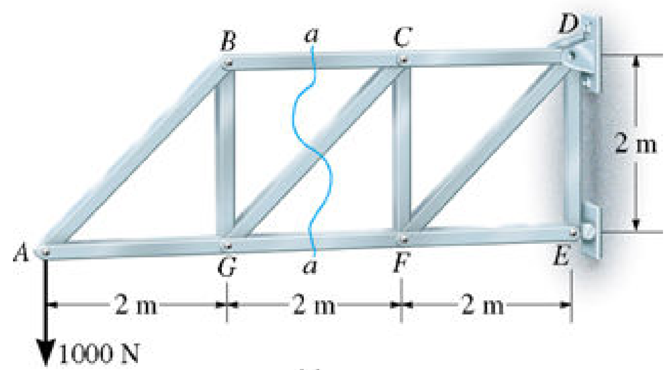


Método da Seções

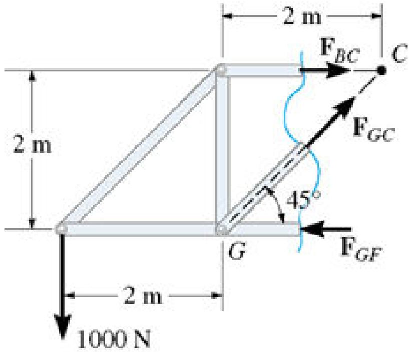
- O método das seções é utilizado para se determinar as forças atuantes dentro de um elemento da treliça.
- Esse método baseia-se no princípio de que se um corpo está em equilíbrio, qualquer parte dele também está.
- O método consiste em seccionar o elemento que se deseja analisar na treliça e aplicar as equações de equilíbrio na região seccionada.

Exemplo do Método das Seções

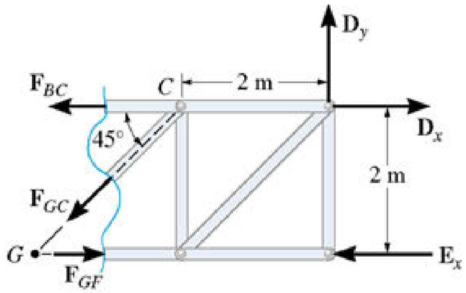




(a)



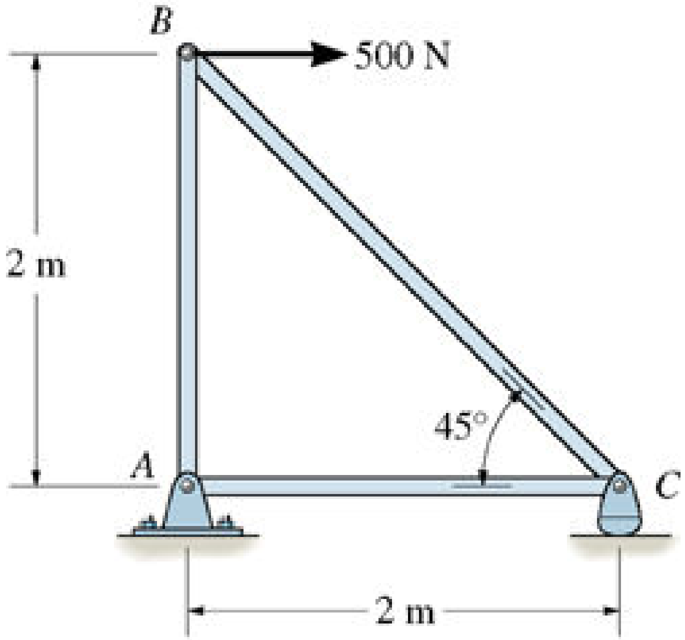
(b)



(c)

Exercício 1

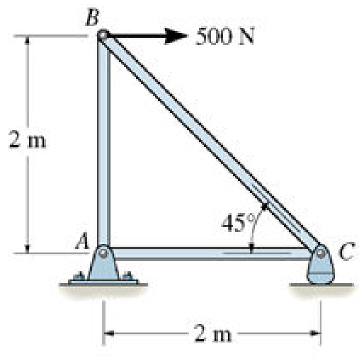
- 1) Determine as forças que atuam em todos os elementos da treliça mostrada na figura e indique se os elementos estão sob tração ou compressão.



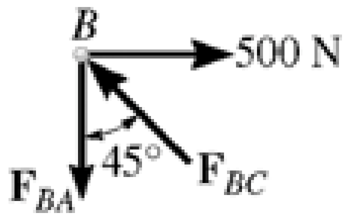
(a)

Solução do Exercício 1

- Equações de equilíbrio nó B.



(a)



(b)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 500 - F_{BC} \cdot sen45^\circ = 0$$

$$F_{BC} = \frac{500}{sen45^\circ} \rightarrow F_{BC} = 707{,}1\text{N (C)}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{BC} \cdot \cos 45^\circ - F_{BA} = 0$$

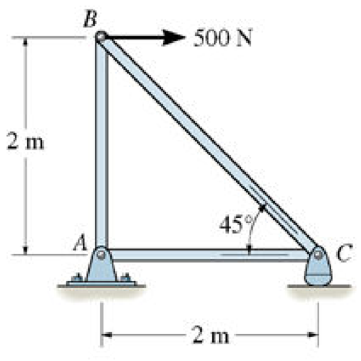
$$F_{BA} = F_{BC} \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_{BA} = 707{,}1 \cdot \cos 45^\circ$$

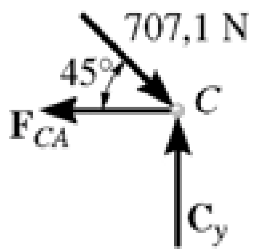
$$F_{BA} = 500\text{N (T)}$$

Solução do Exercício 1

- Equações de equilíbrio nó C.



(a)



(c)

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{CA} + 707{,}1\cos 45^\circ = 0$$

$$707{,}1\cos 45^\circ = F_{CA}$$

$$F_{CA} = 500\text{N (T)}$$

$$\sum F_y = 0$$

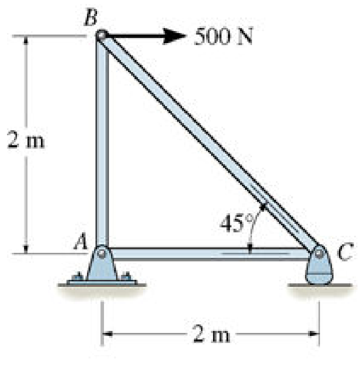
$$C_y - 707{,}1 \cdot sen45^\circ = 0$$

$$C_y = 707{,}1 \cdot sen45^\circ$$

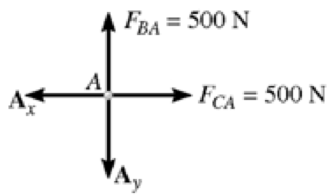
$$C_y = 500\text{N}\uparrow$$

Solução do Exercício 1

- Equações de equilíbrio nó A.



(a)



(d)

$$\sum F_x = 0$$

$$500 - A_x = 0$$

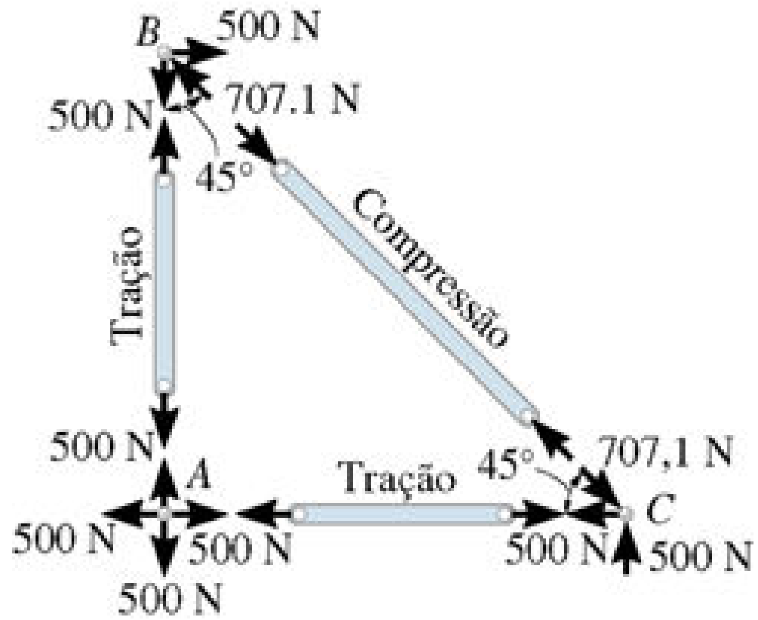
$$A_x = 500\text{N} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$500 - A_y = 0$$

$$A_y = 500\text{N} \downarrow$$

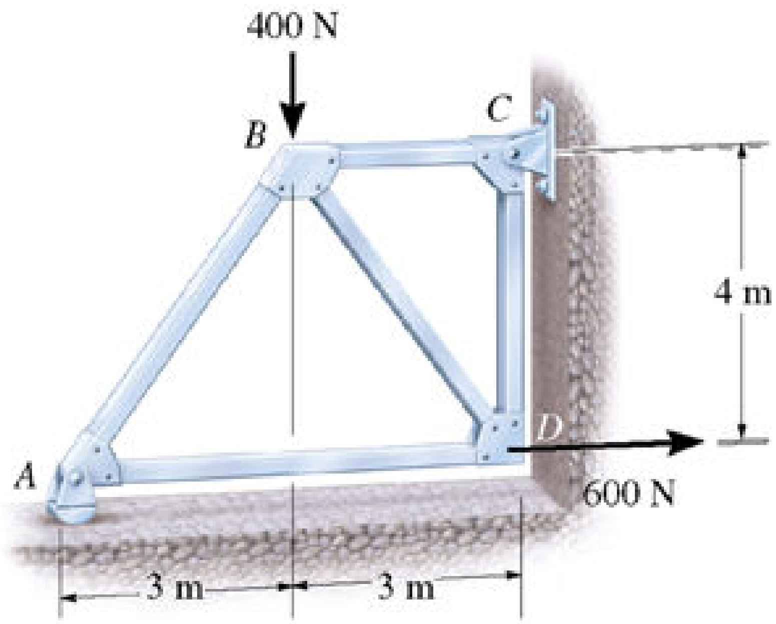
- Representação dos esforços nos elementos da treliça.



(e)

Exercício 2

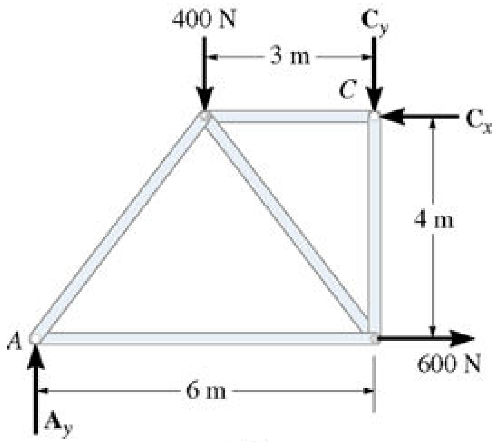
- 2) Determine as forças que atuam em todos os elementos da treliça mostrada na figura e indique se os elementos estão sob tração ou compressão.



(a)

Solução do Exercício 2

- Cálculo das Reações de Apoio.



(b)

$$\sum M_C = 0$$

$$-A_y \cdot 6 + 400 \cdot 3 + 600 \cdot 4 = 0$$

$$A_y = \frac{400 \cdot 3 + 600 \cdot 4}{6} \Rightarrow A_y = 600\text{N}\uparrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$600 - C_x = 0$$

$$C_x = 600\text{N}\leftarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

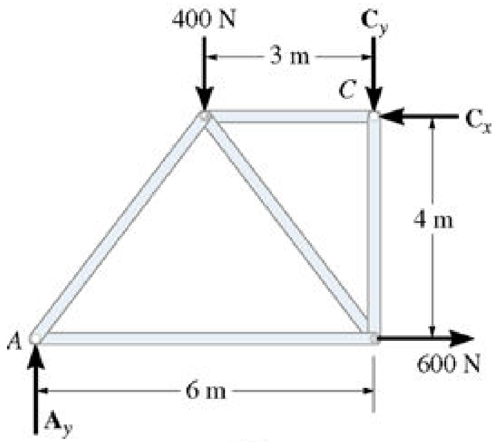
$$600 - 400 - C_y = 0$$

$$C_y = 600 - 400$$

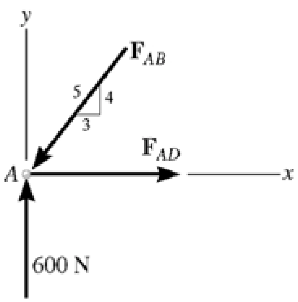
$$C_y = 200\text{N}\downarrow$$

Solução do Exercício 2

- Equações de equilíbrio nó A.



(b)



(c)

$$\sum F_y = 0$$

$$600 - \frac{4}{5} \cdot F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = \frac{5 \cdot 600}{4}$$

$$F_{AB} = 750\text{N (C)}$$

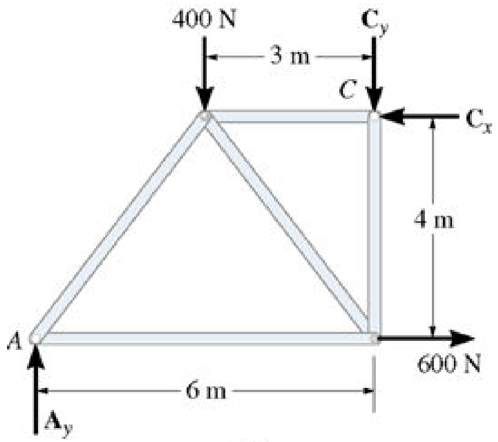
$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AD} - \frac{3}{5} \cdot F_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AD} - \frac{3}{5} \cdot 750 = 0$$

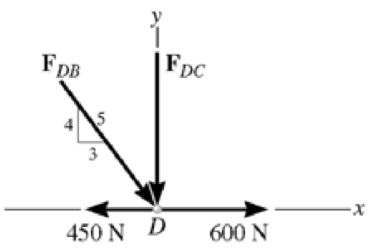
$$F_{AD} = \frac{3}{5} \cdot 750 \quad \Rightarrow \quad F_{AD} = 450\text{N (T)}$$

Solução do Exercício 2

- Equações de equilíbrio nó D.



(b)



(d)

$$\sum F_x = 0$$

$$-450 + \frac{3}{5} \cdot F_{DB} + 600 = 0 \Rightarrow F_{DB} = \frac{(450-600)\cdot 5}{3}$$

$$F_{DB} = -250\text{ N}$$

- O sinal negativo indica que F_{DB} atua no sentido oposto ao indicado na figura

$$F_{DB} = 250\text{ N (T)}$$

$$\sum F_y = 0$$

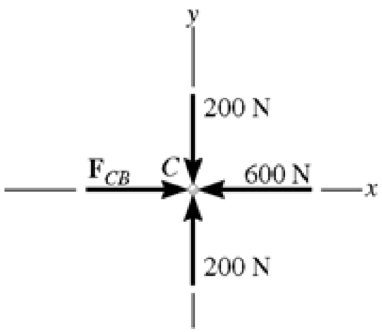
$$-F_{DC} - \frac{4}{5} \cdot F_{DB} = 0 \Rightarrow -F_{DC} - \frac{4}{5} \cdot (-250) = 0$$

$$F_{DC} = \frac{4}{5} \cdot 250$$

$$F_{DC} = 200\text{ N (C)}$$

Solução do Exercício 2

- Equações de equilíbrio nó C.



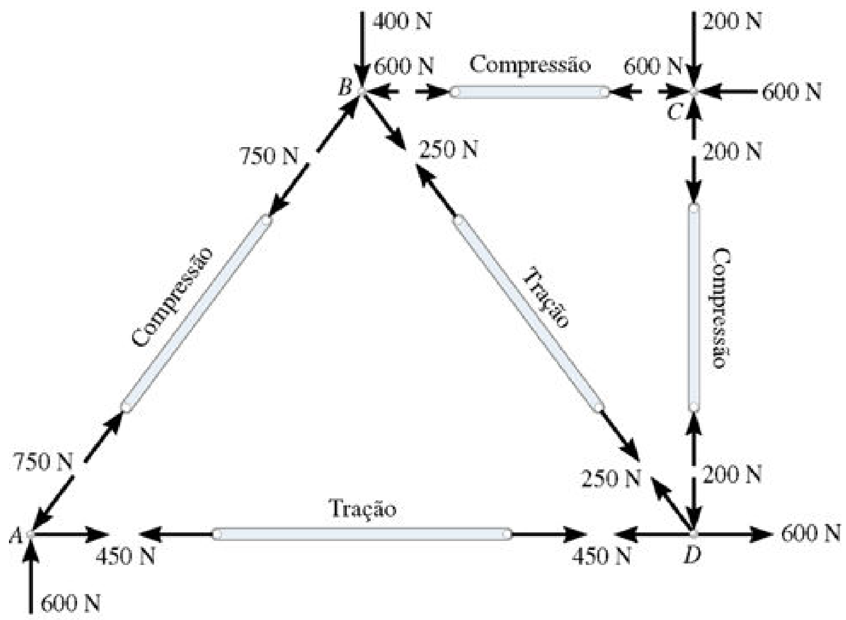
(e)

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{CB} - 600 = 0$$

$$F_{CB} = 600\text{N (C)}$$

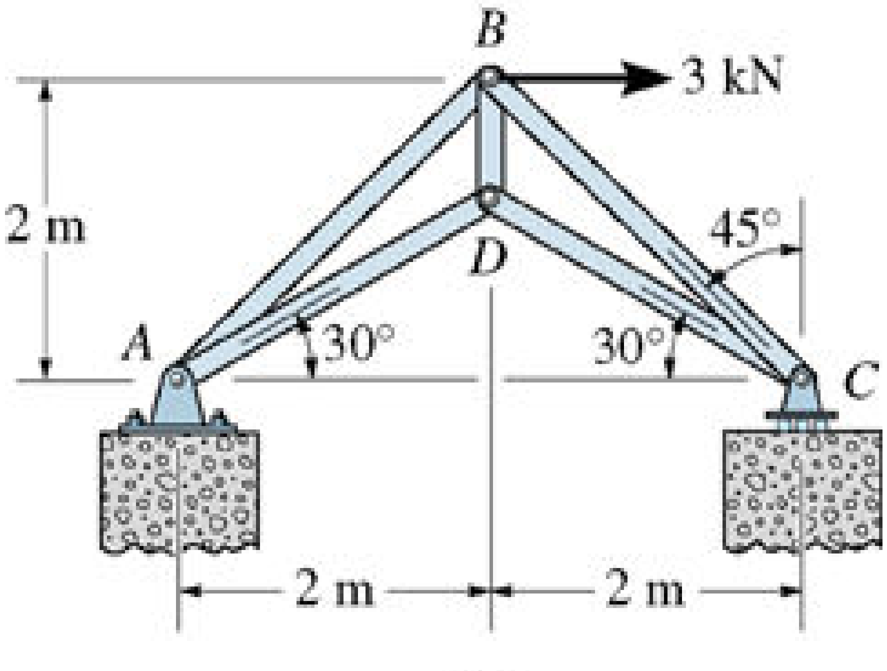
- Representação dos esforços nos elementos da treliça.



(f)

Exercícios Propostos

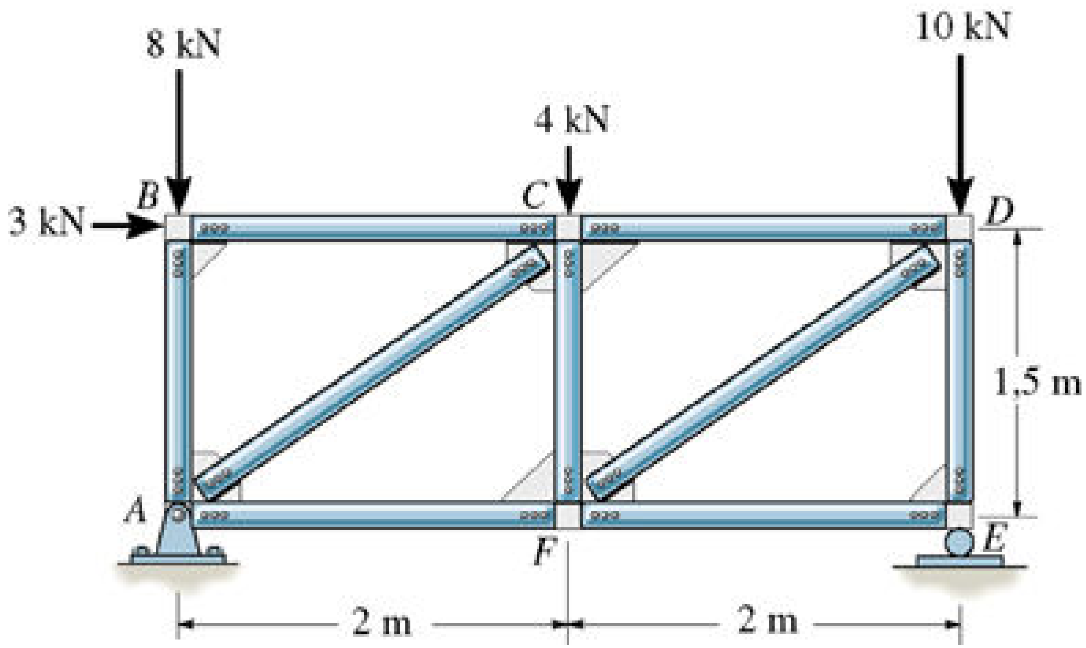
- 1) Determine as forças que atuam em todos os elementos da treliça mostrada na figura e indique se os elementos estão sob tração ou compressão.



(a)

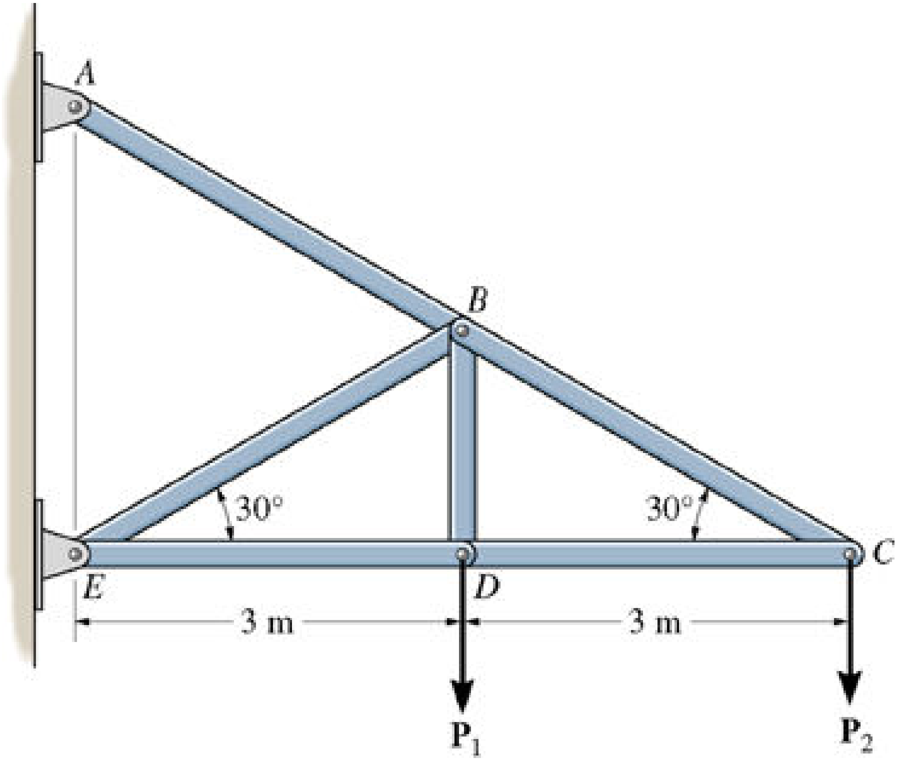
Exercícios Propostos

- 2) Determine as forças que atuam em todos os elementos da treliça mostrada na figura e indique se os elementos estão sob tração ou compressão.



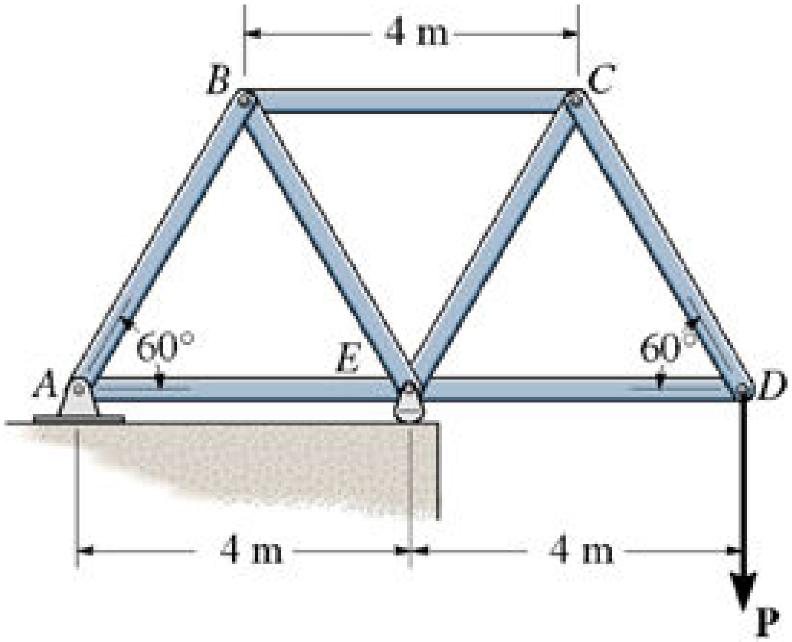
Exercícios Propostos

- 3) Determine as forças que atuam em todos os elementos da treliça mostrada na figura e indique se os elementos estão sob tração ou compressão. Dados: P_1 = 2kN e P_2 = 1,5kN.



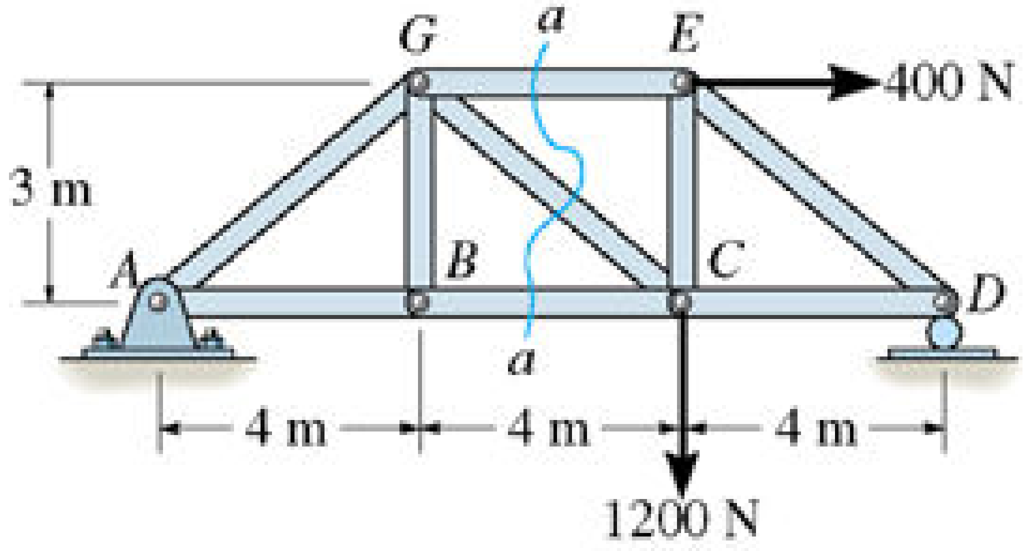
Exercícios Propostos

- 4) Determine as forças que atuam em todos os elementos da treliça mostrada na figura e indique se os elementos estão sob tração ou compressão. Dado: P = 8kN.



Exercícios Propostos

- 5) Determine as forças que atuam nos elementos GE, GC e BC da treliça mostrada na figura e indique se os elementos estão sob tração ou compressão.



(a)

Próxima Aula

- Estudo de Máquinas e Estruturas.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 18 – Análise de Máquinas e Estruturas

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Tópicos Abordados Nesta Aula

- Estudo de Máquinas e Estruturas.

Estruturas e Máquinas

- Estruturas e máquinas são dois tipos de montagens frequentemente compostas por elementos de múltiplas forças e conectadas por pinos.
- A análise de estruturas e máquinas é realizada com a aplicação das equações de equilíbrio de forças e momentos.

Equações de Equilíbrio

Equilíbrio de Forças:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

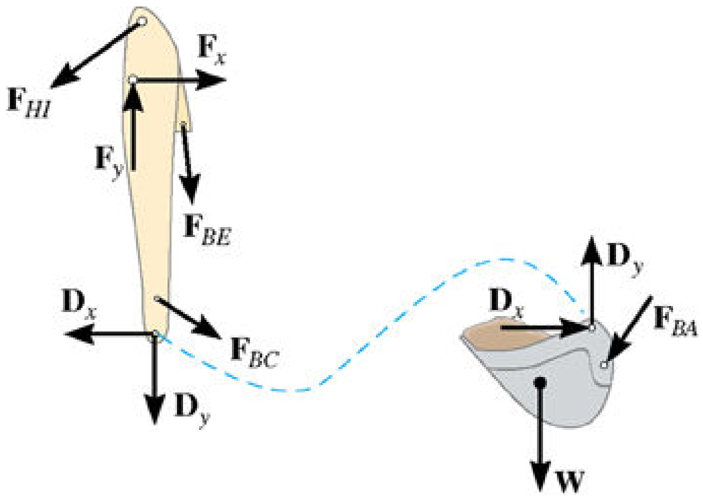
Momentos:

$$\sum M_x = 0$$
$$\sum M_y = 0$$
$$\sum M_z = 0$$

Exemplos de Máquinas e Estruturas

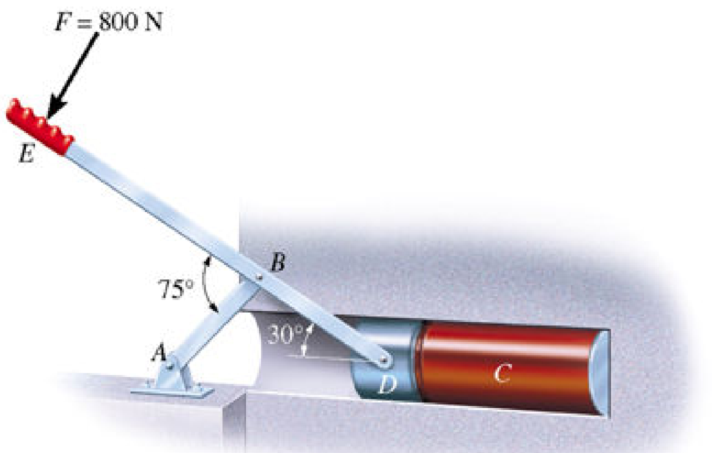
(a)

(b)

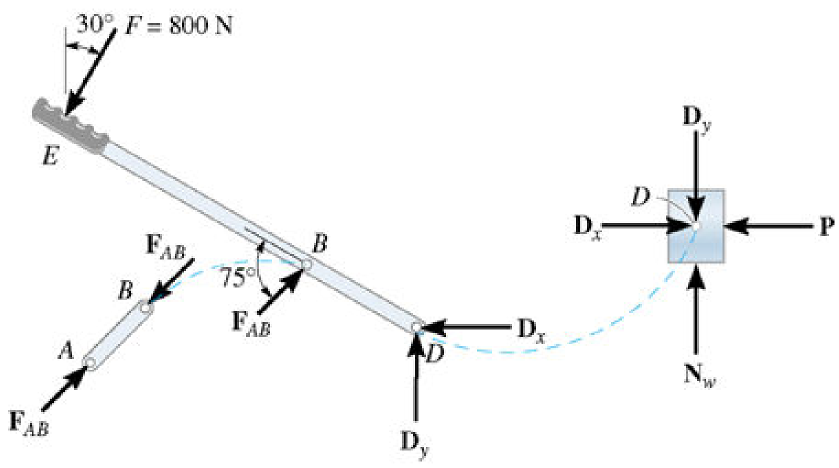


(c)

Exemplos de Máquinas e Estruturas



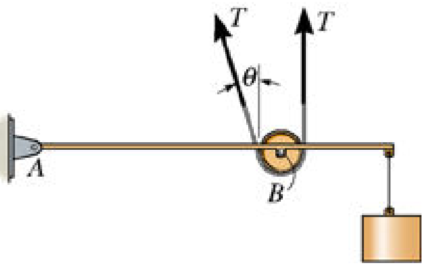
(a)



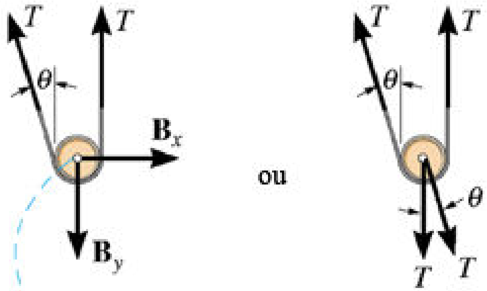
(b)

Exemplos de Máquinas e Estruturas

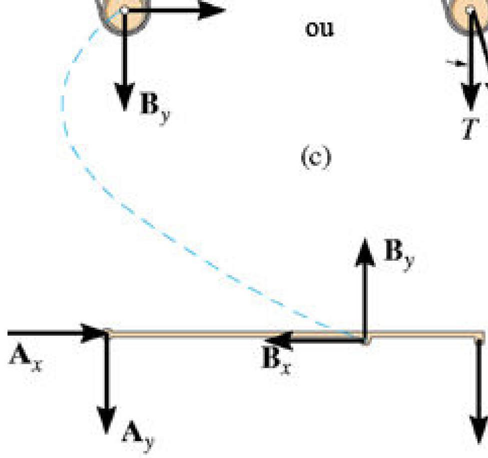
(a)



(b)



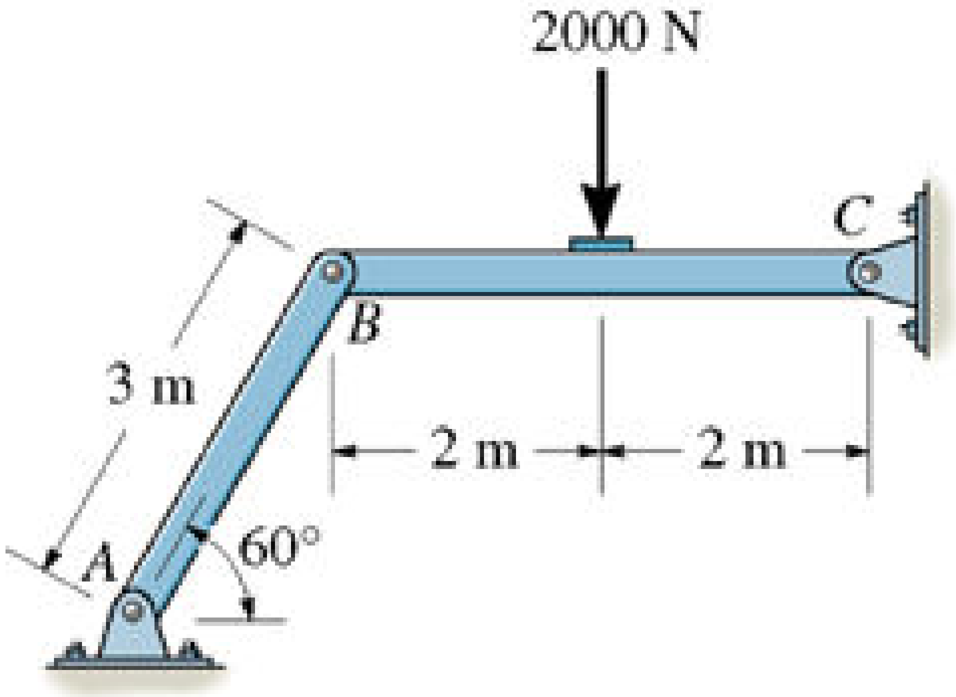
(c)



(d)

Exercício 1

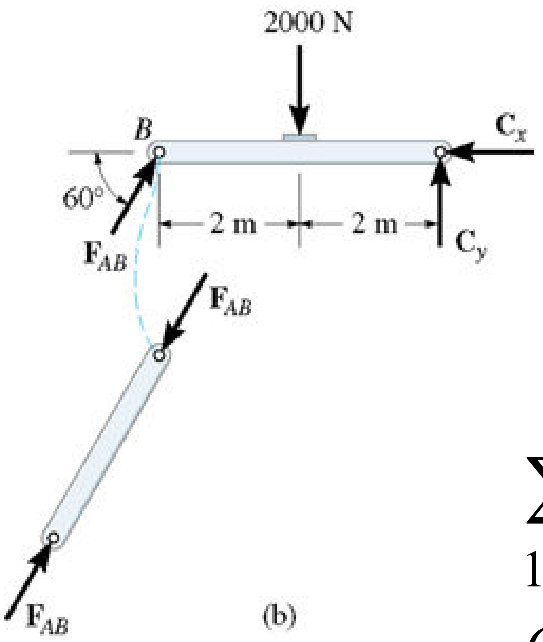
- 1) Determine os componentes horizontal e vertical da força que o pino em *C* exerce no elemento *CB* da estrutura mostrada.



(a)

Solução do Exercício 1

Equações de Equilíbrio no Elemento CB:



$$\sum M_C = 0$$

$$(2000 \cdot 2) - [(F_{AB} \cdot sen60°) \cdot (4)] = 0$$

$$F_{AB} = \frac{4000}{4 \cdot sen60°} \rightarrow F_{AB} = \frac{1000}{sen60°}$$

$$F_{AB} = 1154{,}7\text{N}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$1154{,}7 \cdot \cos 60° - C_x = 0$$

$$C_x = 1154{,}7 \cdot \cos 60°$$

$$C_x = 577\text{N}$$

$$\sum F_y = 0$$

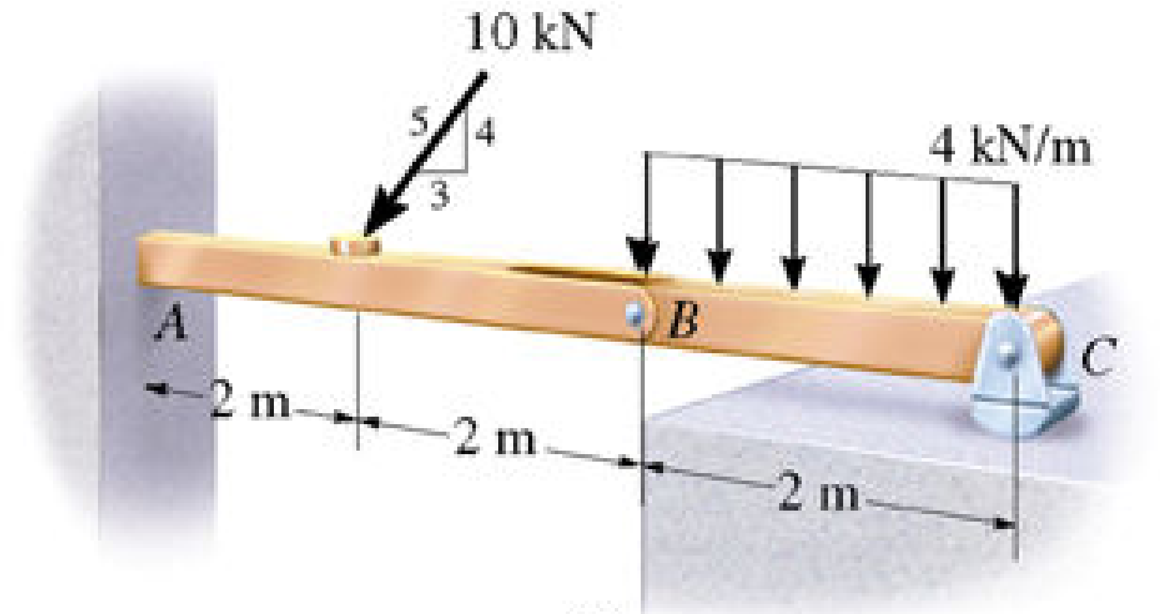
$$1154{,}7 \cdot sen60° - 2000 + C_y = 0$$

$$C_y = 2000 - 1154{,}7 \cdot sen60°$$

$$C_y = 1000\text{N}$$

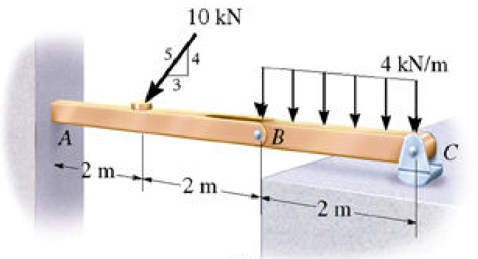
Exercício 2

- 2) A viga mostrada na figura é conectada por um pino em B. Determine as reações em seus apoios. Despreze o peso e a espessura da viga.



(a)

Solução do Exercício 2



(a)

Segmento AB:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - \left[10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 2\right] - (B_y \cdot 4) = 0 \text{ (I)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - \left[10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\right] + B_x = 0 \text{ (II)}$$

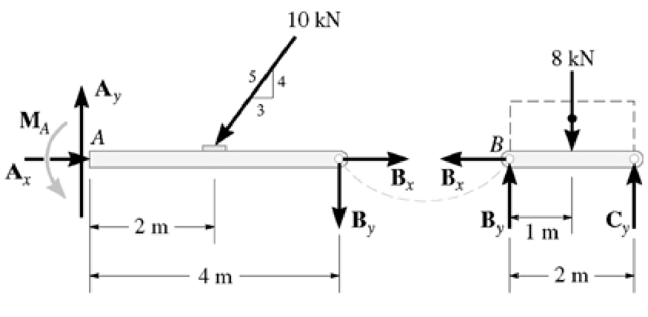
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \left[10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)\right] - B_y = 0 \text{ (III)}$$

Segmento BC:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (-8 \cdot 1) + (C_y \cdot 2) = 0 \text{ (IV)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0 \text{ (V)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - 8 + C_y = 0 \text{ (VI)}$$



(b)

Solução do Exercício 2

Segmento das Equações:

Substituindo (V) em (II):

$$A_x - \left[10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\right] + 0 = 0$$

$$A_x = \left[10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\right]$$

$$A_x = 6\text{kN} \qquad B_x = 0$$

De (IV):

$$(-8 \cdot 1) + (C_y \cdot 2) = 0$$

$$C_y = \frac{8}{2}$$

$$C_y = 4\text{kN}$$

Em (VI):

$$B_y - 8 + C_y = 0$$

$$B_y = 8 - C_y$$

$$B_y = 8 - 4$$

$$B_y = 4\text{kN}$$

Em (III):

$$A_y - \left[10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)\right] - B_y = 0$$

$$A_y - \left[10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)\right] - 4 = 0$$

$$A_y = \left[10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)\right] + 4$$

$$A_y = 12\text{kN}$$

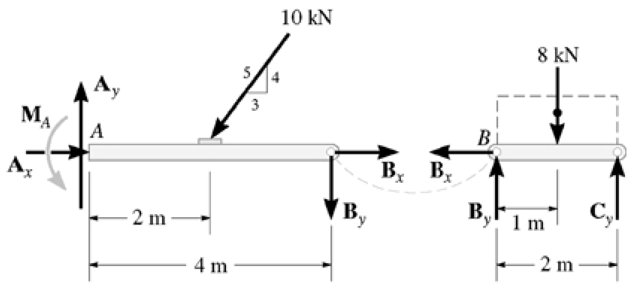
Em (I):

$$M_A - \left[10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 2\right] - (B_y \cdot 4) = 0$$

$$M_A - \left[10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 2\right] - (4 \cdot 4) = 0$$

$$M_A = \left[10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 2\right] + (4 \cdot 4)$$

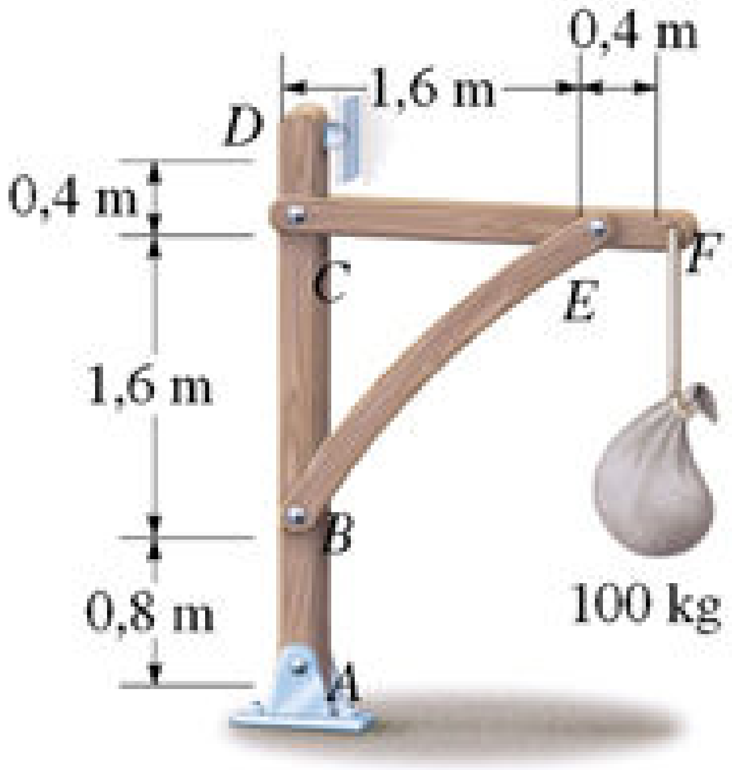
$$M_A = 32\text{kNm}$$



(b)

Exercícios Propostos

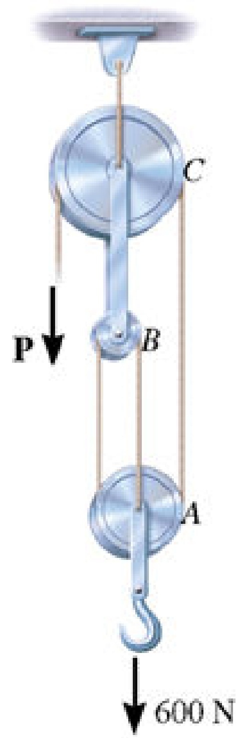
- 1) Determine os componentes horizontais e verticais das forças que o pino em *C* exerce no elemento *ABCD* da montagem mostrada na figura.



(a)

Exercícios Propostos

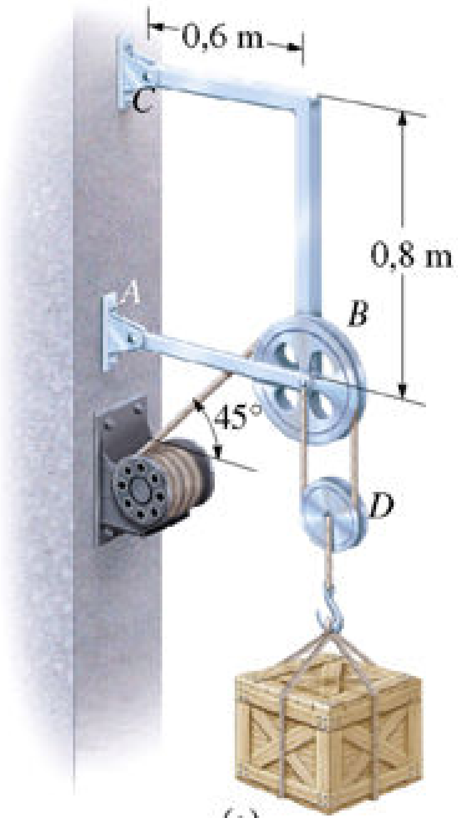
- 2) Determine a tração e a força **P** nos cabos necessárias para se manter a carga de 600N utilizando o sistema de polias sem atrito conforme mostrado na figura.



(a)

Exercícios Propostos

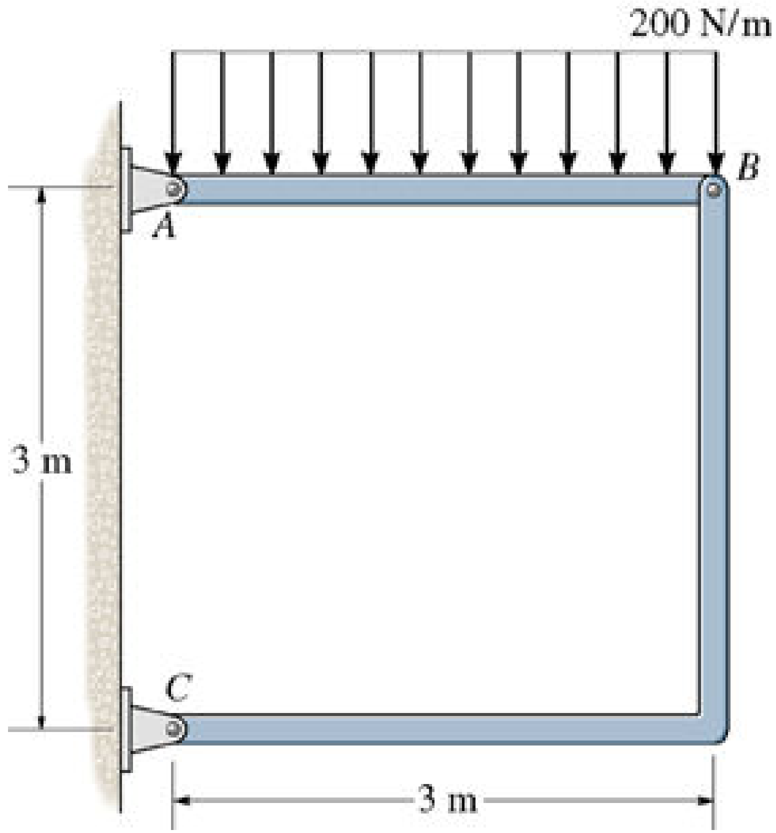
- 3) O bloco de 100kg é mantido em equilíbrio por meio de um sistema de um cabo e polias conforme mostrado na figura. Estando o cabo preso no pino em *B*, calcule as forças que esse pino exerce em cada um dos elementos a ele conectados.



(a)

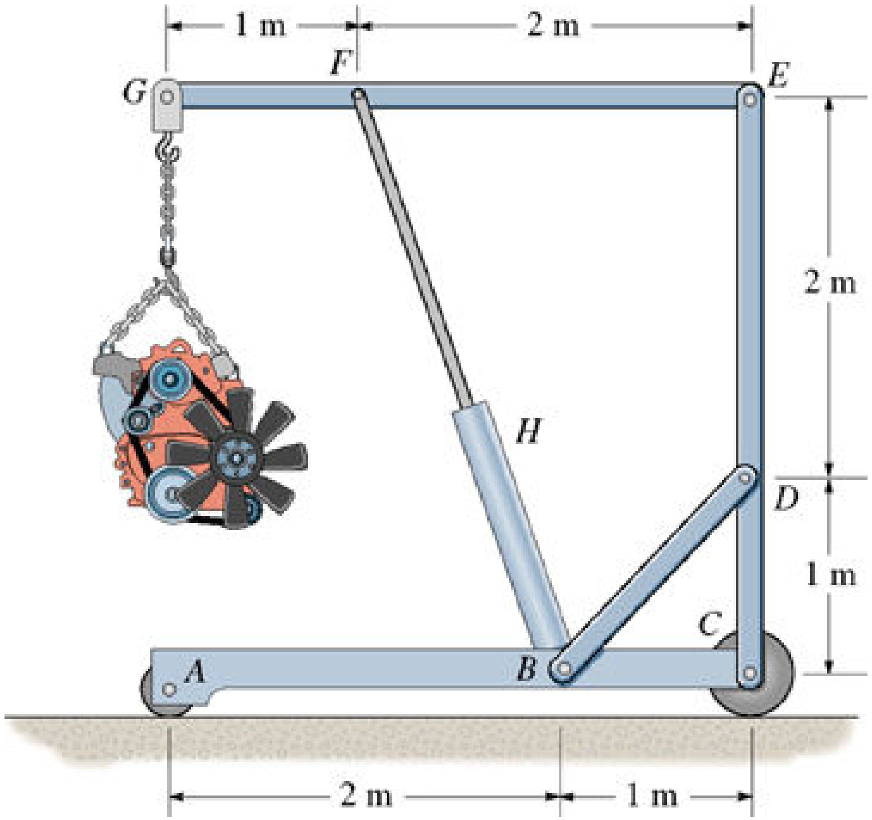
Exercícios Propostos

- 4) Determine os componentes horizontais e verticais das forças nos pino A e C da estrutura mostrada na figura.



Exercícios Propostos

- 5) O macaco hidráulico sustenta um motor de 125kg. Determine a força que a carga produz no elemento *DB* e no *FB*, o qual contém o cilindro hidráulico *H*.



Próxima Aula

- Avaliação 2

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 19 – Avaliação 2

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Avaliação 2

- Matéria da Prova:

- Aula 10 - Momento de uma Força, Formulação Escalar
- Aula 11 - Momento de uma Força, Formulação Vetorial, Princípio dos Momentos
- Aula 12 - Momento em Relação a um Eixo Específico e Momento de um Binário
- Aula 13 - Sistemas Equivalentes de Cargas Concentradas
- Aula 14 - Sistemas Equivalentes de Cargas Distribuídas
- Aula 15 - Cálculo de Reações de Apoio em Estruturas
- Aula 16 - Equilíbrio de um Corpo Rígido em Duas e Três Dimensões
- Aula 17 - Estudo de Treliças Planas
- Aula 18 - Estudo de Máquinas e Estruturas

Próxima Aula

- Exame Final.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

Mecânica Técnica

Aula 20 – Exame Final

Prof. MSc. Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues

Exame Final

- Estudar toda a matéria.