

CÁLCULO II - AULA 04: DERIVADA DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Observação: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} = \ln 2$

h	$\frac{2^h - 1}{h}$
1	1
0,1	0,7177
0,01	0,6956
0,001	0,6934
0,0001	0,6932
0,00001	0,6932
↓	↓
0	$\ln 2 \approx 0,6932$

Seja $f(x) = 2^x$. Então:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{0+h} - 2^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} = \text{OBS } \ln 2$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{1+h} - 2^1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^1(2^h - 1)}{h} = 2^1 \ln 2$$

$$f'(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{k+h} - 2^k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^k(2^h - 1)}{h} = 2^k \ln 2$$

$$f'(x) = (2^x)' = 2^x \ln 2$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x$$

Exercício 1 (PLT - Pág. 101) Encontre as derivadas das funções.

$$1) f(x) = 2e^x + x^2$$

$$2) y = 5t^2 + 4e^t$$

$$6) f(x) = 12e^x + 11^x$$

$$8) f(x) = 2^x + 2 \cdot 3^x$$

$$10) f(x) = e^2 + x^e$$

$$14) z = (\ln 4) e^x$$

$$16) f(t) = (\ln 3)^t$$

$$21) f(x) = e^\pi + \pi^x$$

$$22) f(x) = \pi^x + x^\pi$$

$$24) f(x) = x^{\pi^2} + (\pi^2)^x$$

$$25) f(z) = (\ln 3) z^2 + (\ln 4) e^z$$

$$26) g(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3^x - e$$

Exercício 2 (PLT - Pág. 104 - Problema 2) Se $f(x) = 2^x \cdot 3^x$, encontre $f'(x)$ de duas maneiras: usando a regra do produto e usando o fato de que $2^x \cdot 3^x = 6^x$. Você obtém o mesmo resultado?

Exercício 3 (PLT - Pág. 104) Encontre a derivada.

3) $f(x) = x \cdot e^x$

4) $y = x \cdot 2^x$

5) $y = \sqrt{x} \cdot 2^x$

6) $f(x) = (x^2 - \sqrt{x}) 3^x$

8) $y = (t^2 + 3) e^t$

9) $y = (t^3 - 7t^2 + 1) e^t$

10) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

11) $f(x) = \frac{25x^2}{e^x}$

12) $g(w) = \frac{w^{3,2}}{5^w}$

25) $w(x) = \frac{17e^x}{2^x}$

Exercício 4 (PLT) Com uma taxa anual de inflação de 5%, os preços são descritos por $P = P_0(1,05)^t$, onde P_0 é o preço em reais quando $t = 0$. Quão depressa estão crescendo os preços (em centavos/ano) quando $t = 10$?

Exercício 5 (PLT - Pág. 101 - Problema 38) A população do mundo, em bilhões de pessoas, pode ser modelada pela função $f(t) = 5,3(1,018)^t$, onde t é a quantidade de anos após 1990. Encontre $f(0)$ e $f'(0)$. Encontre $f(30)$ e $f'(30)$. Usando unidades, explique o que cada uma dessas respostas lhe diz sobre a população mundial.

FUNÇÕES COMPOSTAS (revisão)

Dadas duas funções f e g , a função composta $f \circ g$ é definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Exemplo 1 $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 1 \\ (f \circ g)(2) = (3 \times 2 + 1)^2 = 49 \\ (g \circ f)(2) = 3 \times 2^2 + 1 = 13 \end{cases}$ Importante: Em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo 2 $\begin{cases} f(x) = x^3 + x \\ g(x) = e^x \\ m(x) = \cos x \\ n(x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = e^{3x} + e^x \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + x) = e^{x^3+x} \\ (m \circ f)(x) = m(f(x)) = m(x^3 + x) = \cos(x^3 + x) \\ (n \circ f)(x) = n(f(x)) = n(x^3 + x) = \ln(x^3 + x) \\ (n \circ g)(x) = n(g(x)) = n(e^x) = \ln(e^x) = x \end{cases}$

REGRA DA CADEIA

Se f e g são funções diferenciáveis, então a função composta $f \circ g$ é derivável e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Exemplo 3 Sejam $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = 3x + 1 \end{cases}$. Então $\begin{cases} f'(x) = 2x \Rightarrow f'(g(x)) = f'(3x + 1) = 2(3x + 1) \\ g'(x) = 3 \end{cases}$

Pela Regra da Cadeia, $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(3x + 1) \cdot 3 = 18x + 6$.

Isto é, se u é uma função,

$$\begin{aligned} (u^n)' &= n \cdot u^{n-1} \cdot u' \\ (e^u)' &= e^u \cdot u' \\ (a^u)' &= a^u \cdot \ln a \cdot u' \quad \text{etc} \end{aligned}$$

Exemplo 4 Sendo $u(x) = x^2 - 5x + 1$, tem-se

$$[(x^2 - 5x + 1)^{10}]' = (u^{10})' = 10u^9 \cdot u' = 10(x^2 - 5x + 1)^9 \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{u'}$$

Exemplo 5 Sendo $u(x) = x^3 + x$, tem-se: $[e^{(x^3+x)}]' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{(x^3+x)} \cdot (3x^2 + 1)$

Exercício 6 (PLT - Pág. 109) Encontre as derivadas. Suponha que a, b, c e k são constantes.

2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$	14) $f(x) = e^{2x}(x^2 + 5^x)$	20) $w = \sqrt{(x^2 \cdot 5^x)^3}$	34) $h(z) = \left(\frac{b}{a + z^2}\right)^4$
4) $w = (t^3 + 1)^{100}$	16) $p(t) = e^{4t+2}$	26) $f(z) = \sqrt{z}e^{-x}$	38) $f(x) = 6e^{5x} + e^{-x^2}$
10) $f(\theta) = 2^{-\theta}$	17) $g(t) = e^{(1+3t)^2}$	28) $y = \frac{\sqrt{z}}{2^z}$	40) $w = (t^2 + 3t)(1 - e^{-2t})$
12) $g(x) = 3^{(2x+7)}$	18) $z(x) = \sqrt[3]{2^x + 5}$	31) $h(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 9}{x + 3}}$	43) $f(y) = e^{e^{(y^2)}}$
			48) $f(x) = (3x^2 + \pi)(e^x - 4)$

RESPOSTAS

Exercício 1

- | | | | |
|--------------------------|------------------|-------------------------------------|---|
| 1) $2e^x + 2x$ | 8) $2^x \ln 2$ | 16) $(\ln 3)^t \ln(\ln 3)$ | 24) $\pi^2 \cdot x^{\pi^2-1} + 2\pi^{2x} \ln \pi$ |
| 2) $10t + 4e^t$ | 10) $x^{e-1}e$ | 21) $\pi^x \ln \pi$ | 25) $2(\ln 3)z + (\ln 4)e^z$ |
| 6) $12e^x + 11^x \ln 11$ | 14) $(\ln 4)e^x$ | 22) $\pi^x \ln \pi + \pi x^{\pi-1}$ | 26) $2 + \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^4} + 3^x(\ln 3)$ |

Exercício 3

- | | |
|---|--|
| 3) $e^x(1+x)$ | 9) $e^t(t^3 - 4t^2 - 14t + 1)$ |
| 4) $2^x(1+x \ln 2)$ | 10) $\frac{1-x}{e^x}$ |
| 5) $2^{x-1} \left(\frac{1+2x \ln 2}{\sqrt{x}} \right)$ | 11) $\frac{-25x(-2+x)}{e^x}$ |
| 6) $3^x \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + (x^2 - \sqrt{x}) \ln 3 \right)$ | 12) $\frac{3,2w^{2,2} - w^{3,2} \ln 5}{5^w}$ |
| 8) $e^t(2t+t^2+3)$ | 25) $\frac{17e^x(1-\ln 2)}{2^x}$ |

Exercício 6

- | | |
|--|---|
| 2) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ | 14) $f'(x) = e^{2x}(2x^2 + 2 \cdot 5^x + 2x + 5^x \ln 5)$ |
| 4) $w' = 300t^2(t^3 + 1)^{99}$ | 16) $p'(t) = 4e^{4t+2}$ |
| 10) $f'(\theta) = -2^{-\theta} \ln 2$ | 17) $g'(t) = 6(1+3t)e^{(1+3t)^2}$ |
| 12) $g'(x) = 2 \cdot 3^{(2x+7)} \ln 3$ | 18) $z'(x) = \frac{2^x \ln 2}{3(2^x + 5)^{2/3}}$ |
| 20) $w' = \frac{3\sqrt{x^2 \cdot 5^x}}{2}(2x \cdot 5^x + x^2 5^x \ln 5)$ | 34) $h'(z) = \frac{-8b^4 z}{(a+z^2)^5}$ |
| 26) $f'(z) = \frac{e^{-x}(1-2z)}{2\sqrt{z}}$ | 38) $f'(x) = 30e^{5x} - 2xe^{-x^2}$ |
| 28) $y' = \frac{1-2z \ln 2}{2^{z+1}\sqrt{z}}$ | 40) $w' = (2t+3)(1-e^{-2t}) + (t^2+3t)2e^{-2t}$ |
| 31) $h'(x) = \frac{x^2+6x-9}{2\sqrt{\frac{x^2+9}{x+3}}(x+3)^2}$ | 43) $f'(y) = 2ye^{(ey^2+y^2)}$ |
| | 48) $f'(x) = 6x(e^x - 4) + (3x^2 + \pi)e^x$ |