

AULA 05: DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E TRIGONOMÉTRICAS

DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Demonstração: Se $u(x) = \log_a x$,

· Pela Regra da Cadeia: $[a^{(\log_a x)}]' = [a^u]' = a^{(\log_a x)} \cdot \ln a \cdot u' = x \cdot \ln a \cdot \underbrace{(\log_a x)'}_{u'} \quad (*)$

· Por outro lado, $a^{\log_a x} = x \Rightarrow (a^{\log_a x})' = (x)' = 1 \quad (**)$

Igualando (*) e (**), tem-se $x \cdot \ln a \cdot (\log_a x)' = 1$. Logo, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Em particular, $(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}$.

Exemplo 1 $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$

Exemplo 2 Se $u(x) = (1 + x^2)$, então, pela Regra da Cadeia:

$$[\ln(1 + x^2)]' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{1 + x^2} \cdot (1 + x^2)' = \frac{2x}{(1 + x^2)}$$

Exercício 1 (PLT - Pág. 117) Encontre a derivada da função dada.

1) $f(t) = \ln(t^2 + 1)$

2) $f(x) = \ln(1 - x)$

4) $f(x) = e^{\ln(e^{2x^2+3})}$

5) $f(z) = \frac{1}{\ln z}$

10) $y = x \ln x - x + 2$

11) $f(x) = \ln(e^{ax} + b)$

12) $h(w) = w^3 \ln(10w)$

13) $f(x) = \ln(e^{7x})$

14) $f(x) = e^{\ln x + 1}$

16) $f(t) = \ln(e^{\ln t})$

22) $h(z) = z^{\ln 2}$

29) $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$

30) $y = 2x(\ln x + \ln 2) - 2x + e$

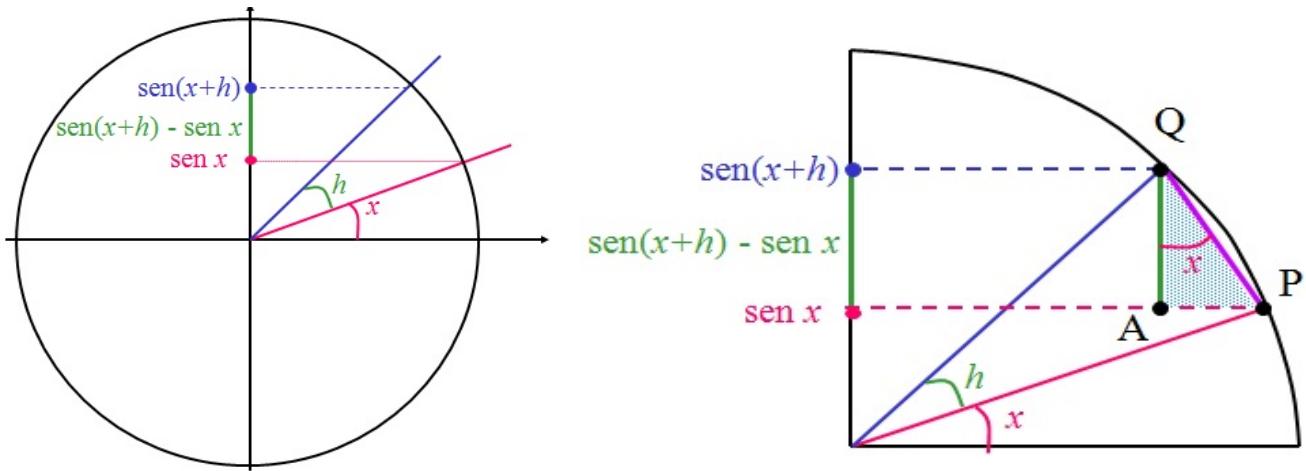
32) $f(t) = \ln(\ln t) + \ln(\ln 2)$

Exercício 2 (Pág. 118 - Problema 41) Para encontrar a acidez de soluções diferentes, os químicos usam o pH. O pH é definido em termos da concentração x de íons de hidrogênio na solução como $pH = -\log x$. Encontre a taxa de variação do pH em relação à concentração de íons de hidrogênio quando o pH é 2.

DERIVADA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Derivada de seno

Seja $f(x) = \sin x$. Por definição, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{QA}{\text{Arco } QP}$.



Se h é pequeno, $\triangle QAP$ é, aproximadamente, um triângulo retângulo e o ângulo \hat{Q} é igual a x .

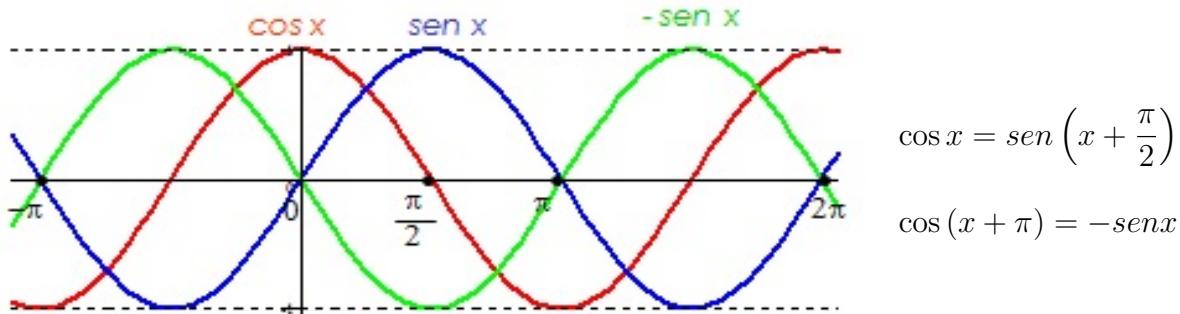
Neste triângulo, $\cos x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{QA}{QP}$.

Portanto, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{QA}{QP} = \cos x$. Isto é: $(\sin x)' = \cos x$.

Derivada de cos-seno

Seja $f(x) = \cos x$. Então $(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

Isto é: $(\cos x)' = -\sin x$.



Derivada de tangente

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x.$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cotg x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad (\operatorname{cosec} x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\operatorname{cosec} x \cdot \cotg x$$

Exercício 3 (PLT - Pág. 114) Calcule as derivadas.

- | | | |
|--|--|--|
| 4) $z = \cos(4\theta)$ | 18) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$ | 30) $f(\alpha) = \cos \alpha + 3 \operatorname{sen} \alpha$ |
| 6) $g(x) = \operatorname{sen}(2 - 3x)$ | 20) $k(x) = \sqrt{(\operatorname{sen}(2x))^3}$ | 34) $G(x) = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + 1}{\cos^2 x + 1}$ |
| 8) $g(\theta) = \operatorname{sen}^2(2\theta) - \pi\theta$ | 22) $y = e^\theta \operatorname{sen}(2\theta)$ | 36) $h(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$ |
| 10) $w = \operatorname{sen}(e^t)$ | 24) $z = \sqrt{\operatorname{sen} t}$ | 38) $f(x) = \operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{sen}(3x)$ |
| 14) $R(\theta) = e^{\operatorname{sen}(3\theta)}$ | 26) $g(z) = \operatorname{tg}(e^z)$ | 40) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x + \cos x)$ |
| 16) $w(x) = \operatorname{tg}(x^2)$ | 28) $w = e^{-\operatorname{sen} \theta}$ | |

RESPOSTAS - Exercício 1 .

- | | |
|---|---|
| 1) $f'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$ | 13) $f'(x) = 7$ |
| 2) $f'(x) = \frac{-1}{1 - x}$ | 14) $f'(x) = e$ |
| 4) $f'(x) = 4xe^{2x^2+3}$ | 16) $f'(t) = \frac{1}{t}$ |
| 5) $f'(z) = \frac{-1}{z(\ln^2 z)}$ | 22) $h'(z) = \ln 2 \cdot z^{\ln 2 - 1}$ |
| 10) $y' = \ln x$ | 29) $f'(x) = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$ |
| 11) $f'(x) = a \frac{e^{ax}}{e^{ax} + b}$ | 30) $y' = 2(\ln x + \ln 2)$ |
| 12) $h'(w) = w^2 [3 \ln(10w) + 1]$ | 32) $f'(t) = \frac{1}{t \ln t}$ |

RESPOSTAS - Exercício 2 -43, 43

RESPOSTAS - Exercício 3 .

- | | |
|---|---|
| 4) $z' = -4 \operatorname{sen}(4\theta)$ | 24) $z' = \frac{\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen} t}}$ |
| 6) $g'(x) = -3 \cos(-2 + 3x)$ | 26) $g'(z) = e^z \sec^2(e^z)$ |
| 8) $g'(\theta) = 4 \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\theta) - \pi$ | 28) $w' = -\cos \theta e^{-\operatorname{sen} \theta}$ |
| 10) $w' = \operatorname{cos}(e^t) \cdot e^t$ | 30) $f'(\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha + 3 \cos \alpha$ |
| 14) $R'(\theta) = 3 \cos(3\theta) e^{\operatorname{sen} 3\theta}$ | 34) $G'(x) = -\frac{6 \cdot \operatorname{sen} x \cos x}{(\cos^2 x + 1)^2}$ |
| 16) $w'(x) = 2x \sec^2(x^2)$ | 36) $h'(x) = 2^{\operatorname{sen} x} \ln 2 \cos x$ |
| 18) $f'(x) = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cos x$ | 38) $f'(x) = 2 \cos(2x) \operatorname{sen}(3x) + 3 \operatorname{sen}(2x) \cos(3x)$ |
| 20) $k'(x) = \frac{3 \operatorname{sen}^2(2x) \cos(2x)}{\sqrt{(\operatorname{sen}(2x))^3}}$ | 40) $f'(x) = \operatorname{cos}(\operatorname{sen} x + \cos x) (\cos x - \operatorname{sen} x)$ |
| 22) $y' = e^\theta (\operatorname{sen} 2\theta + 2 \cos 2\theta)$ | |